

Communication Numérique

Filtrage des signaux

Yoann Morel

<http://xymaths.free.fr/Signal/Communication-Numerique-cours-TP.php>

- ① Généralités sur les filtres
- ② Méthode de Fourier
- ③ Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- ④ Filtrage adapté
- ⑤ Effet du bruit et probabilité d'erreur
- ⑥ Application : Critère et Filtre de Nyquist
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- 4 Filtrage adapté
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

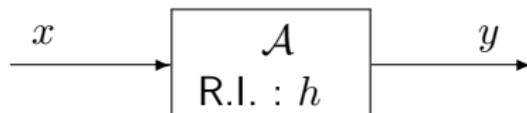
Un canal de transmission réel a une bande passante limitée :

- physiquement (bande passante réelle)
- par l'utilisateur (limitation de débit, partage entre utilisateurs, problèmes de CEM, ...)

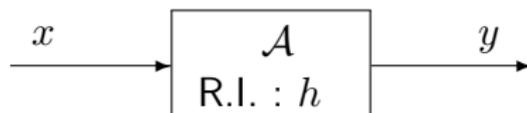
Or la DSP d'un signal réel, donc limité dans le temps, n'est jamais limité.

⇒ Nécessité de la limiter : recours au filtrage

Rappel sur les filtres



Rappel sur les filtres



$$y = h * x$$

$$\hat{y} = H \times \hat{x}$$

où, $H = \hat{h}$ est la fonction de transfert du filtre.

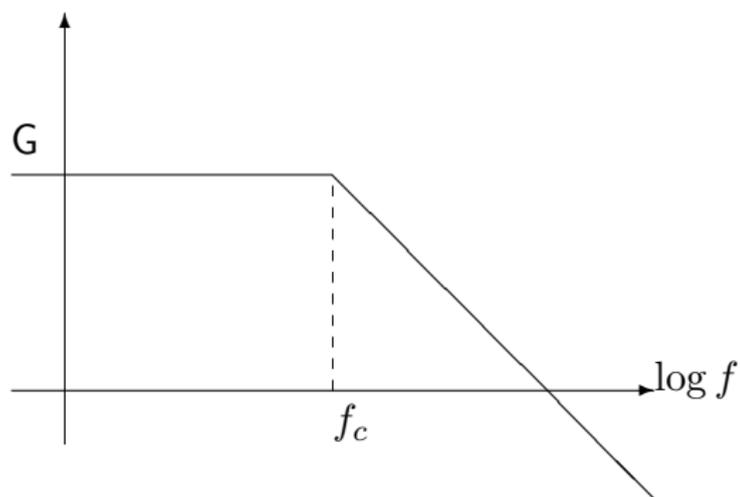
Un filtre est caractérisé par sa fonction de transfert

↪ Modification du contenu spectral du signal

Principaux filtres

- Filtre passe-bas

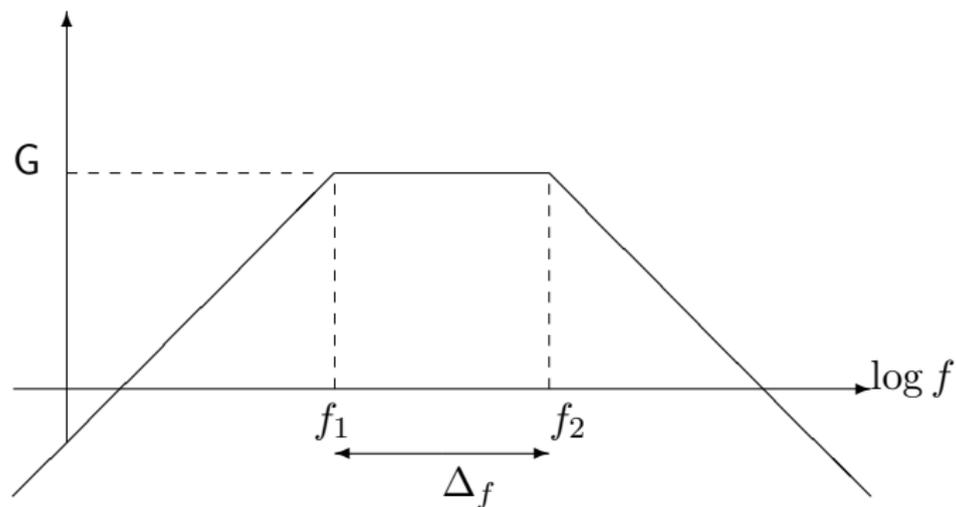
$|H(f)|$



Principaux filtres

- Filtre passe-bande

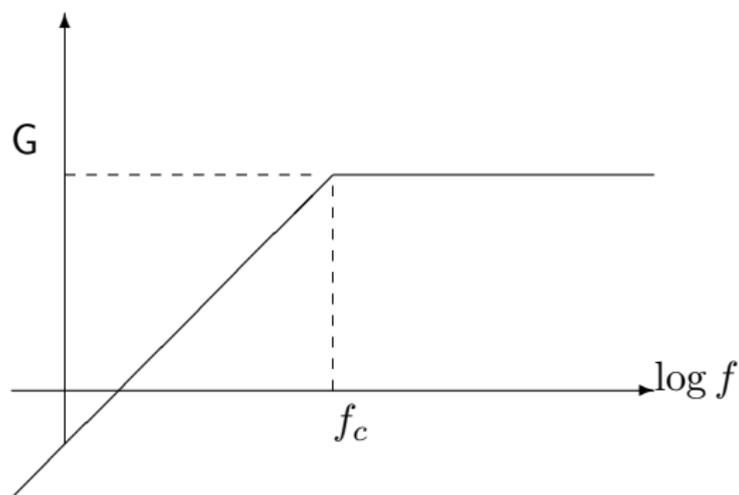
$|H(f)|$



Principaux filtres

- Filtre passe-haut

$|H(f)|$

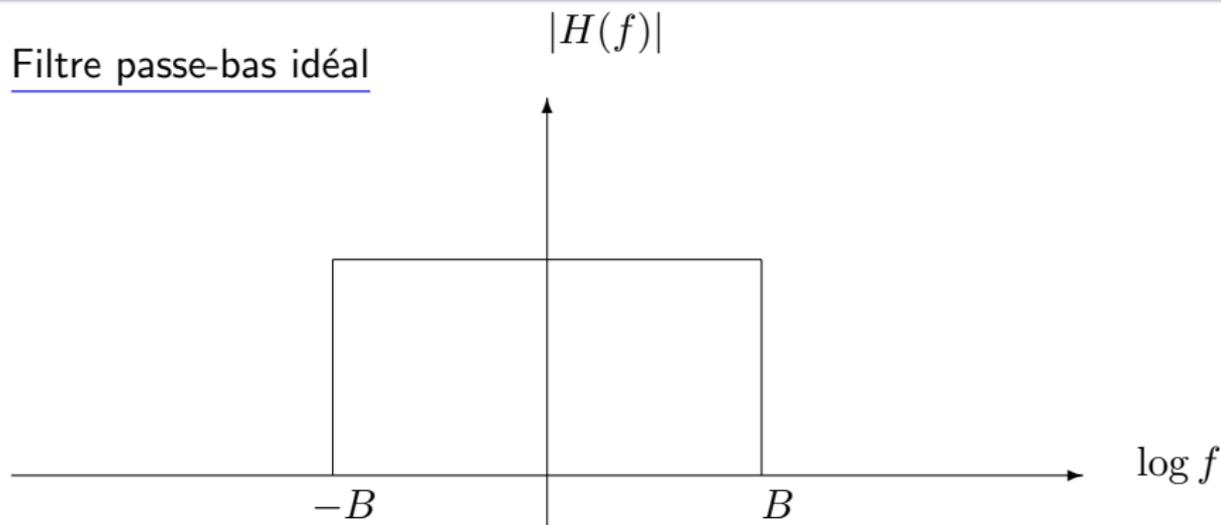


Synthèse de filtres

- Méthode analogique : électronique, composants actifs et passifs
- Méthode numérique :
 - méthode de Fourier : étude de $H(f)$
 - méthode séquentielle : relation $x_k \leftrightarrow y_k$

- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier**
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- 4 Filtrage adapté
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

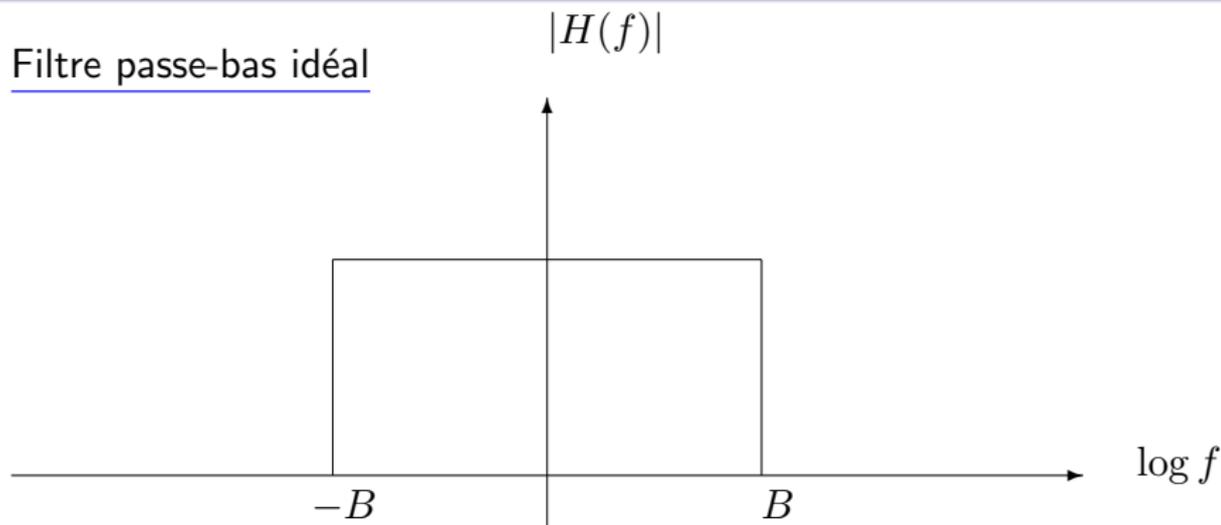
Filtre passe-bas idéal



$$H(f) = a \text{Rect}_{2B}(f) e^{-2i\pi ft_0}$$

D'où la R.I. :

Filtre passe-bas idéal

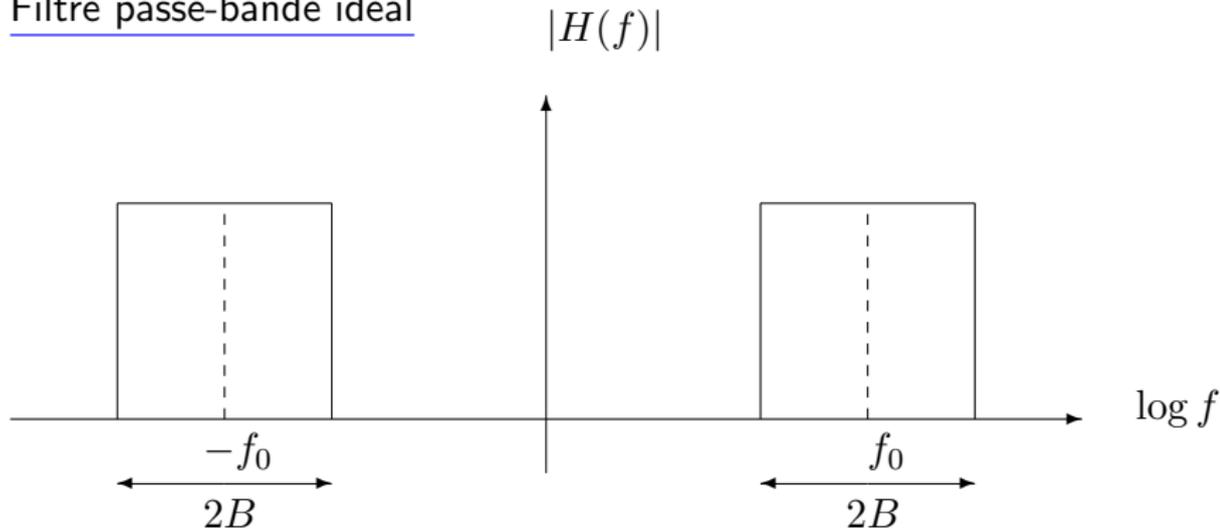


$$H(f) = a \text{Rect}_{2B}(f) e^{-2i\pi f t_0}$$

D'où la R.I. :

$$h(t) = 2aB \text{sinc}(2B(t - t_0))$$

Filtre passe-bande idéal

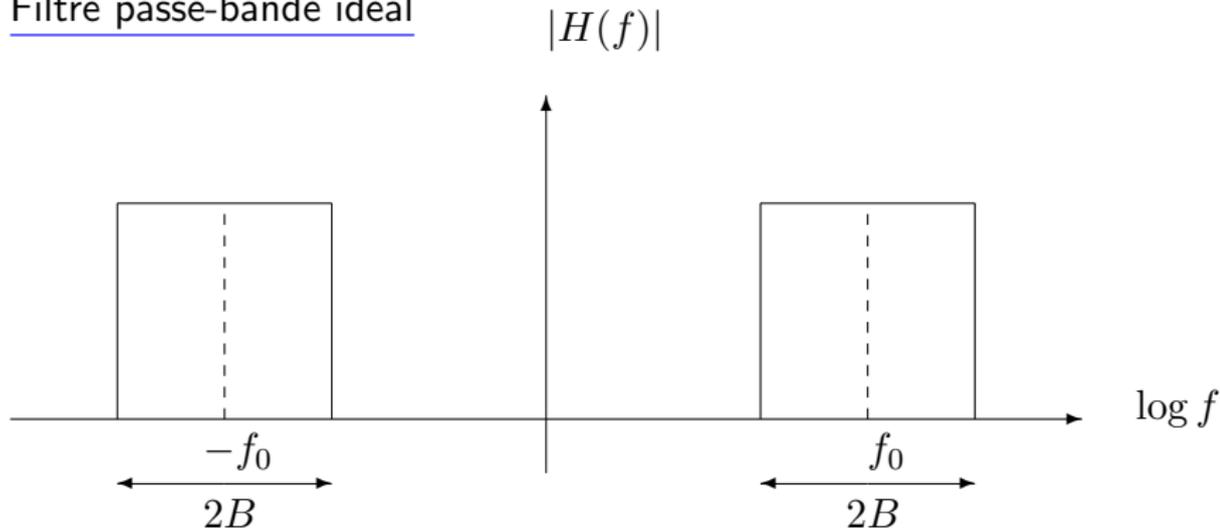


$$H(f) = a [\text{Rect}_{2B}(f - f_0) + \text{Rect}_{2B}(f + f_0)] e^{-2i\pi f t_0}$$

d'où la R.I.

$$h(t) = \underbrace{4aB \text{sinc}(2B(t - t_0))}_{\text{envelope}} \underbrace{\cos(2\pi f_0(t - t_0))}_{\text{carrier}}$$

Filtre passe-bande idéal



$$H(f) = a [\text{Rect}_{2B}(f - f_0) + \text{Rect}_{2B}(f + f_0)] e^{-2i\pi f t_0}$$

d'où la R.I.

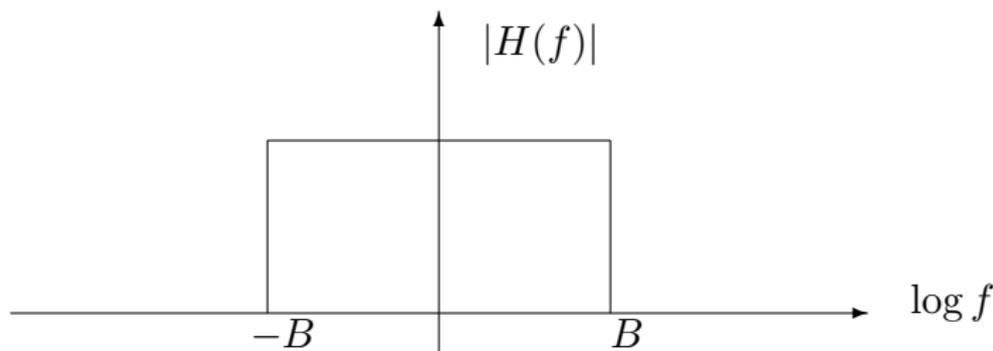
$$h(t) = \underbrace{4aB \text{sinc}(2B(t - t_0))}_{\text{R.I. filtre passe-bas}} \underbrace{\cos(2\pi f_0(t - t_0))}_{\text{fréquence porteuse}}$$

Exemple de filtrage

Débruitage d'un signal

Un bruit blanc additif gaussien (BBAG) est un signal additif "haute fréquence".

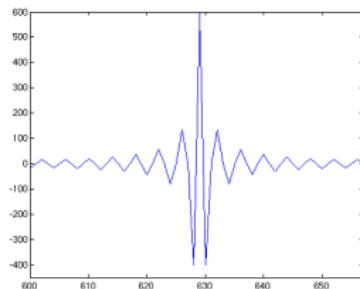
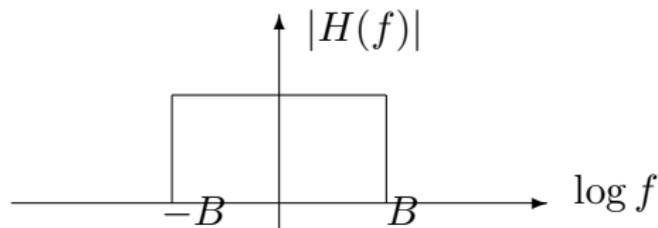
⇒ Filtrage par un filtre passe-bas pour débruiter un signal



DD

Propriété : Un filtre est réalisable (causal) si et seulement si Supp h est borné, i.e. si et seulement si la réponse impulsionnelle $h(t)$ est nulle en dehors d'un intervalle de \mathbb{R} .

Problème : Ces filtres idéaux ne sont pas réalisables



On multiplie $h(t)$ par une fenêtre W telle que

$$h(t) W(t) = 0 \quad \text{pour } t \notin [t_1; t_2]$$

où W est une fenêtre

-
-
-
-
-
-
- ...

Problème :

On multiplie $h(t)$ par une fenêtre W telle que

$$h(t) W(t) = 0 \quad \text{pour } t \notin [t_1; t_2]$$

où W est une fenêtre

- rectangulaire
-
-
-
-
-
- ...

Problème :

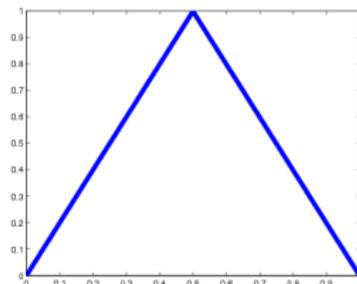
On multiplie $h(t)$ par une fenêtre W telle que

$$h(t) W(t) = 0 \quad \text{pour } t \notin [t_1; t_2]$$

où W est une fenêtre



- triangulaire



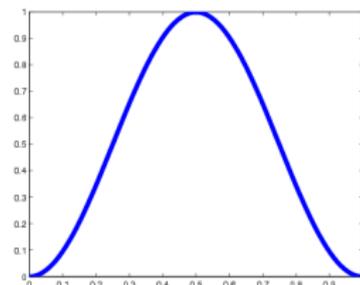
Problème :

On multiplie $h(t)$ par une fenêtre W telle que

$$h(t) W(t) = 0 \quad \text{pour } t \notin [t_1; t_2]$$

où W est une fenêtre

-
-
- Hanning (ou plutôt Hann ...)
-
-
-
- ...



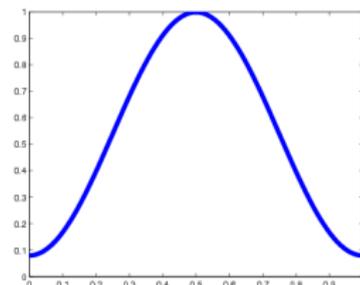
Problème :

On multiplie $h(t)$ par une fenêtre W telle que

$$h(t) W(t) = 0 \quad \text{pour } t \notin [t_1; t_2]$$

où W est une fenêtre

-
-
-
- Hamming
-
-
- ...



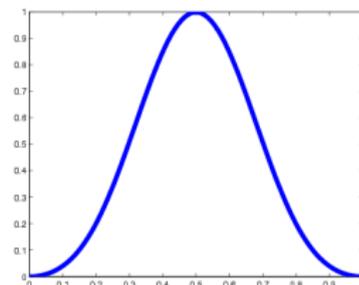
Problème :

On multiplie $h(t)$ par une fenêtre W telle que

$$h(t) W(t) = 0 \quad \text{pour } t \notin [t_1; t_2]$$

où W est une fenêtre

-
-
-
-
- Blackman
-
- ...



Problème :

On multiplie $h(t)$ par une fenêtre W telle que

$$h(t) W(t) = 0 \quad \text{pour } t \notin [t_1; t_2]$$

où W est une fenêtre

-
-
-
-
-
- cosinus surélevé
- ...

Problème :

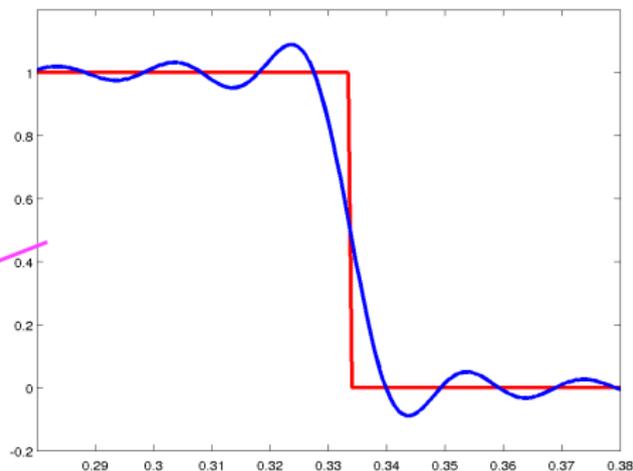
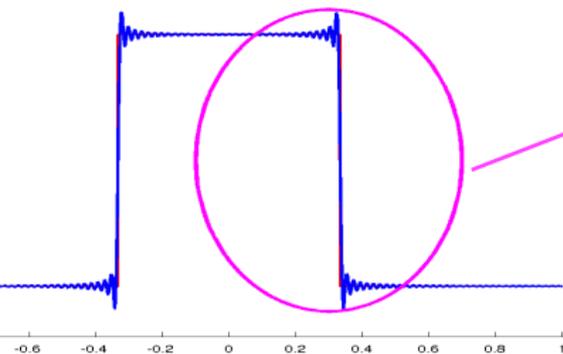
On multiplie $h(t)$ par une fenêtre W telle que

$$h(t) W(t) = 0 \quad \text{pour } t \notin [t_1; t_2]$$

où W est une fenêtre

-
-
-
-
-
-
- ...

Problème : par cette troncature, on introduit des oscillations (Gibbs)

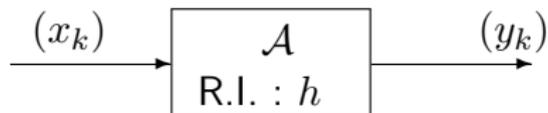


⇒ Introduction ondulations :

- Gain du filtre n'est plus constant, mais dépend (légèrement) de la fréquence
- diminution de la raideur du filtre

- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII**
- 4 Filtrage adapté
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

Filtres numériques \longleftrightarrow Signaux échantillonnés



La relation générale s'écrit alors (convolution discrète) :

$$y_k = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} h_l x_{k-l}$$

où, (h_n) est la réponse impulsionnelle (discrète) du filtre.

Transformation discrète de Fourier :

$$\begin{aligned}\hat{y}_k &= \sum_n y_k e^{-2i\pi fn} \\ &= \sum_n \left(\sum_l h_l x_{n-l} \right) e^{-2i\pi fn} \\ &= \sum_l h_l \left(\sum_n x_{n-l} e^{-2i\pi fn} \right) \\ &= \sum_l h_l \left(\sum_{n'} e^{-2i\pi f(n'+l)} \right) \\ &= \sum_l h_l e^{-2i\pi fl} \left(\sum_{n'} e^{-2i\pi fn'} \right)\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la relation,

$$\widehat{y}_k = \widehat{h}_k \widehat{x}_k$$

Filtre à réponse impulsionnelle finie : RIF (FIR)

Ce sont des filtres tels que $\text{Supp } h$ borné, c'est-à-dire $h_n = 0$ si $n \notin [n_1; n_2]$

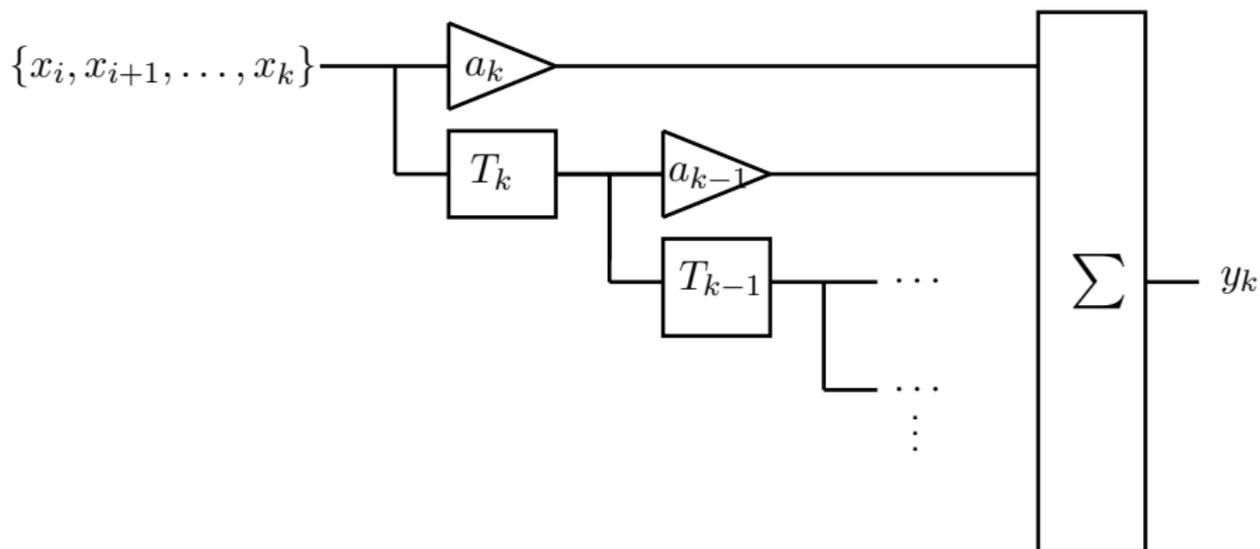
On a alors,

$$\widehat{h}(f) = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} h_n e^{-2i\pi f n}$$

et d'autre part,

$$y_k = \sum_{l=n_1}^{l=n_2} h_l x_{k-l}$$

Schéma d'un filtre RIF



Exemple simple de filtre numérique

h tel que $h_0 = h_1 = \frac{1}{2}$, et $h_n = 0$ si $n \neq 0$ et $n \neq 1$.

C'est-à-dire,

$$y_k = \sum_l h_l x_{k-l} = \frac{1}{2} (x_k + x_{k-1})$$

y_k est une moyenne locale du signal x_k d'entrée.

On a alors,

$$\hat{h}(f) = \sum_n h_n e^{-2i\pi f n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2i\pi f} = e^{-i\pi f} \cos(\pi f)$$

et donc,

$$\begin{aligned} |\hat{h}(f)|^2 = \cos^2(\pi f) &\sim 1, \quad f \rightarrow 0 \\ &\sim 0, \quad f \rightarrow \pm\pi \end{aligned}$$

Exemple simple de filtre numérique

h tel que $h_0 = h_1 = \frac{1}{2}$, et $h_n = 0$ si $n \neq 0$ et $n \neq 1$.

C'est-à-dire,

$$y_k = \sum_l h_l x_{k-l} = \frac{1}{2} (x_k + x_{k-1})$$

y_k est une moyenne locale du signal x_k d'entrée.

On a alors,

$$\hat{h}(f) = \sum_n h_n e^{-2i\pi f n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2i\pi f} = e^{-i\pi f} \cos(\pi f)$$

et donc,

$$|\hat{h}(f)|^2 = \cos^2(\pi f) \sim 1, \quad f \rightarrow 0$$

$$\sim 0, \quad f \rightarrow \pm\pi$$

h_n définit ainsi un filtre passe-bas.

Les filtres FIR ne sont en général pas suffisants (trops restrictifs).
On définit alors les filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII, ou IIR), pour lesquels on a :

$$\hat{h}(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h_n e^{-2i\pi f n} \quad , \quad h_n \neq 0$$

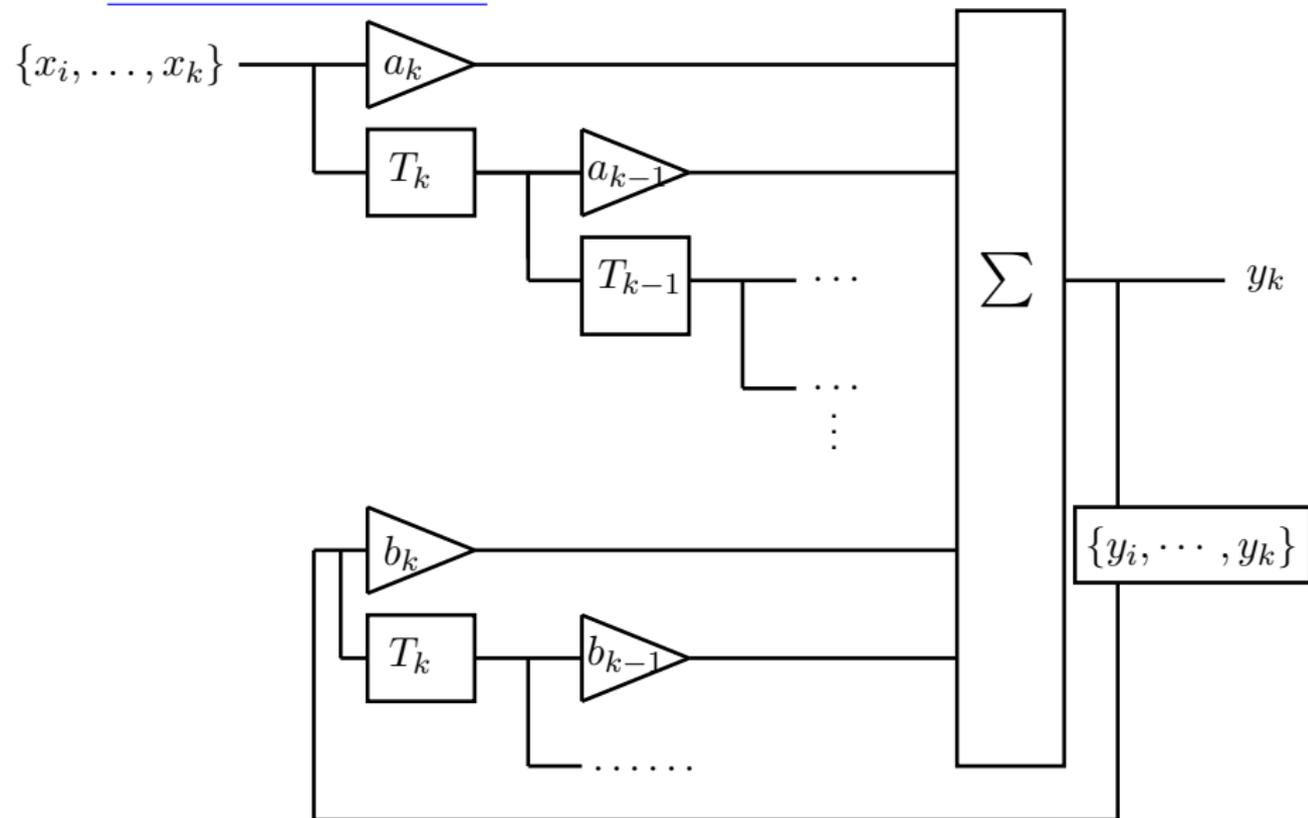
En pratique, il est impossible d'implémenter des suites de longueur infinie.

On introduit alors ces filtres de manière récursive :

$$y_k = \sum_{n=0}^M \beta_n x_{k-n} - \sum_{n=1}^N \alpha_n y_{k-n}$$

y_k est calculé à partir de l'entrée x_k et des valeurs antérieures de y_k : c'est un calcul itératif

Schéma d'un filtre RII



En réordonnant, on obtient, en posant $\alpha_0 = 1$,

$$\alpha_0 y_k = \sum_{n=0}^M \beta_n x_{k-n} - \sum_{n=1}^N \alpha_n y_{k-n} \iff \sum_{n=0}^N \alpha_n y_{k-n} = \sum_{n=0}^M \beta_n x_{k-n}$$

soit, en prenant la transformée de Fourier,

$$\left(\sum_{n=0}^N \alpha_n e^{-2i\pi fn} \right) \hat{y}(f) = \left(\sum_{n=0}^M \beta_n e^{-2i\pi fn} \right) \hat{x}(f)$$

d'où, la fonction de transfert,

$$H(f) = \hat{h}(f) = \frac{\hat{y}(f)}{\hat{x}(f)} = \frac{\sum_{n=0}^M \beta_n e^{-2i\pi fn}}{\sum_{n=0}^N \alpha_n e^{-2i\pi fn}}$$

En utilisant une transformée en z ($z = e^{-2i\pi f}$),

$$H(f) = \tilde{H}(z) = \frac{\sum_{n=0}^M \beta_n z^n}{\sum_{n=0}^N \alpha_n z^n} = \frac{\beta_M z^M + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_N z^N + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

En utilisant une transformée en z ($z = e^{-2i\pi f}$),

$$H(f) = \tilde{H}(z) = \frac{\sum_{n=0}^M \beta_n z^n}{\sum_{n=0}^N \alpha_n z^n} = \frac{\beta_M z^M + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_N z^N + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

⇒ Les fréquences de coupure sont les racines de P .

⇒ Problème de stabilité du filtre, si le dénominateur s'annule (racines de Q)

⇒ En général, existence d'un domaine de stabilité qu'il faut respecter.

- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- 4 Filtrage adapté**
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

Soit un signal codé avec la forme d'onde $g(t)$ (formant du code en ligne), et bruité :

$$x(t) = g(t) + w(t) \quad , \quad t \in [0; T_b]$$

où w est un BBAG de densité spectrale $W(f) = \frac{N_0}{2}$

On cherche le filtre en reception $h(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = g_0(t) + n(t)$$

tel que le RSB en $t = T$ (instant de décision) :

$$\eta = \frac{|g_0(T)|^2}{E(n^2(t))} \quad \text{soit maximal}$$

On a :

$$g_0(T) = h(t) * g(t) = \int_{\mathbb{R}} H(f) G(f) e^{2i\pi fT} df$$

et,

$$E(n^2(t)) = \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 |W(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 df$$

d'où,

$$\eta = \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} H(f) G(f) e^{2i\pi fT} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 df}$$

Par Cauchy-Schwarz, on a :

$$\eta \leq \frac{2}{N_0} \int_{\mathbb{R}} |G(f)|^2 df$$

avec égalité si et seulement si,

$$H(f) = k \overline{G(f)} e^{-2i\pi fT} \quad , \quad k \in \mathbb{C}$$

soit, pour des filtres réels,

$$h(t) = g(T - t)$$

Le filtre $h(t) = g(T - t)$ est le filtre optimal, ou filtre adapté, à la détection du signal $g(t)$ bruité.

- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- 4 Filtrage adapté
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur**
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

Effet du bruit et probabilité d'erreur

Le filtre adapté est le filtre optimal pour la détection du signal utile.

La mesure de la performance du filtrage (adapté ou non) est donnée par la probabilité d'erreur :

probabilité de décider qu'un bit 1 à était reçu alors qu'un bit 0 a été envoyé, ou inversement.

Exemple de calcul de la probabilité d'erreur

On considère un signal polaire NRZ :

$$x(t) = \begin{cases} +A + w(t) & , \text{ si bit émis} = +1 \\ -A + w(t) & , \text{ si bit émis} = +0 \end{cases}$$

D'après le théorème de Bayes, on a

$$p_e = p(0|1) p_1 + p(1|0) p_0$$

avec, $\begin{cases} p_0, p_1 & \text{les probabilités d'avoir un 0 ou un 1} \\ p(0|1), p(1|0) & \text{les probabilités conditionnelles} \end{cases}$

Soit Y la sortie du filtre adapté :

$$Y = g(-t) * x(t) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} x(t) dt$$

et donc, si un 0 a été envoyé,

$$Y = -A + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} w(t) dt$$

d'où la densité de probabilité conditionnelle,

$$T_{Y|0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y+A)^2}{2\sigma^2}\right)$$

avec la variance σ du bruit $w(t)$ gaussien : $\sigma^2 = \frac{N_0}{2T_b}$

On obtient alors, avec un seuil de décision λ ,

$$p(1|0) = p_{Y|0}(Y \geq \lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} T(Y|0) dz = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A + \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}} \right)$$

avec la fonction d'erreur complémentaire :

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-s^2} ds$$

On trouve de même,

$$p(0|1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A - \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}} \right)$$

Au total, on obtient,

$$\frac{p_1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A - \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}} \right) + \frac{p_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A + \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}} \right)$$

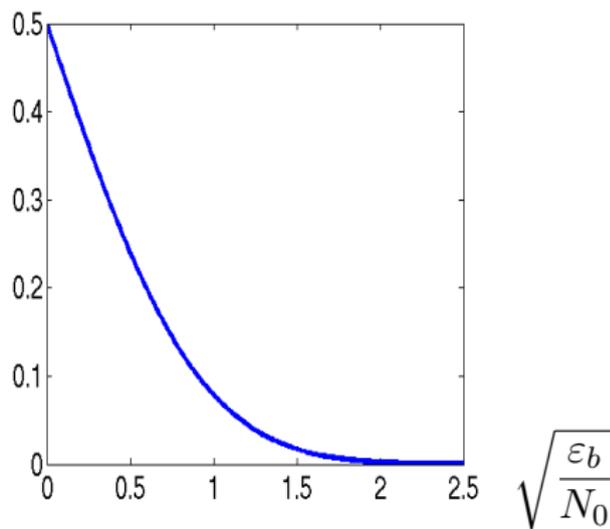
Dans le cas où, $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$, alors p_e est minimum pour $\lambda = 0$ et alors,

$$p_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{\sqrt{N_0/T_b}} \right)$$

et donc, si on pose $\varepsilon_b = A^2 T_b$, l'énergie par bit (impulsion d'amplitude A de durée T_b), alors,

$$p_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

$$p_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$



- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- 4 Filtrage adapté
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist**
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- 4 Filtrage adapté
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist**
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

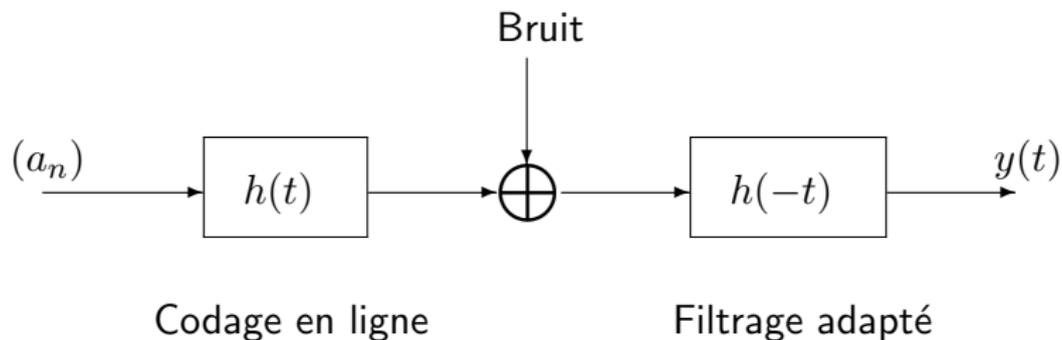
Interférence entre symboles (IES)

Interférence entre symboles :

L'interférence entre symboles est un phénomène qui se produit si le niveau échantillonné à l'instant de décision ne dépend pas du seul symbole attendu, mais se trouve altéré par la superposition d'un ou plusieurs autres symboles voisins.

Interférence entre symboles (IES)

Réponse globale du système, avec filtre adapté en réception :



On a alors,

$$y(t) = \sum_n a_n r(t - nT) + \text{bruit}$$

avec la réponse globale du système :

$$r(t) = h(t) * h(-t)$$

Interférence entre symboles (IES)

Réponse en sortie du filtre adapté :

$$y(t) = \sum_n a_n r(t - nT) + \text{bruit}$$

Echantillonnage aux instants $t = kT$:

$$y(kT) = \sum_n a_n r(kT - nT) + b_k$$

Interférence entre symboles (IES)

Réponse en sortie du filtre adapté :

$$y(t) = \sum_n a_n r(t - nT) + \text{bruit}$$

Echantillonnage aux instants $t = kT$:

$$\begin{aligned} y(kT) &= \sum_n a_n r(kT - nT) + b_k \\ &= a_k r(0) + \sum_{n \neq k} a_n r((k - n)T) + b_k \end{aligned}$$

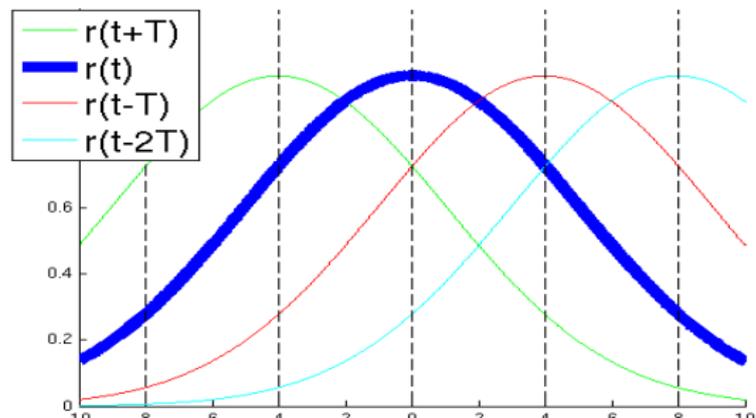
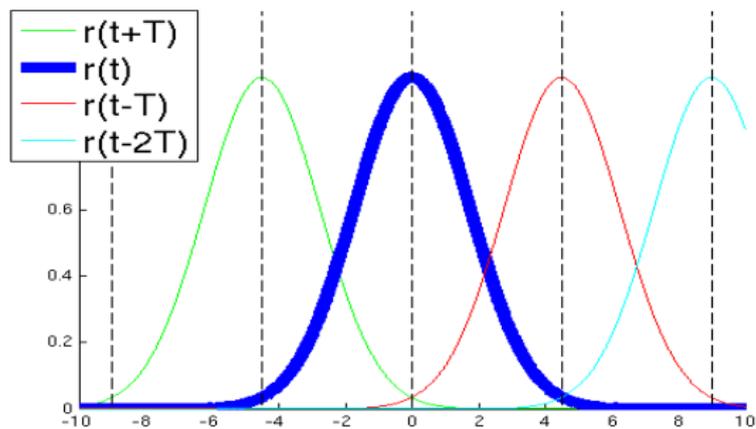
Interférence entre symboles (IES)

Réponse en sortie du filtre adapté :

$$y(t) = \sum_n a_n r(t - nT) + \text{bruit}$$

Echantillonnage aux instants $t = kT$:

$$\begin{aligned}
 y(kT) &= \sum_n a_n r(kT - nT) + b_k \\
 &= \underbrace{a_k r(0)}_{\text{Symbole à détecter}} + \underbrace{\sum_{n \neq k} a_n r((k - n)T)}_{\text{IES}} + \underbrace{b_k}_{\text{bruit}}
 \end{aligned}$$



Interférence entre symboles (IES)

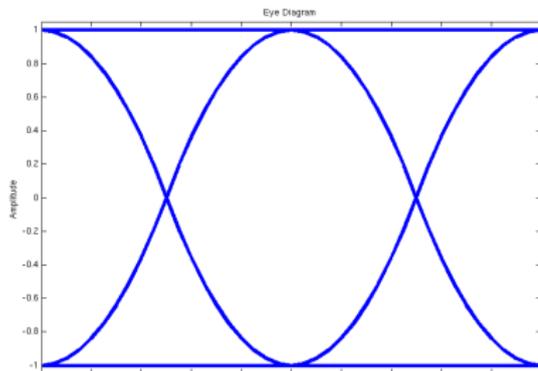
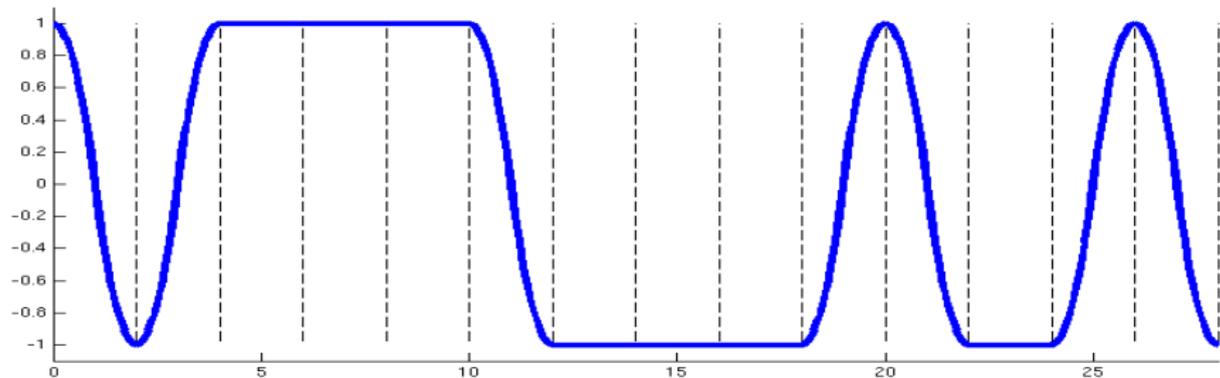
On appelle distortion maximale, le ratio :

$$D_{\max} = \frac{\sum_{n \neq 0} |a_n r(nT)|}{|r(0)|}$$

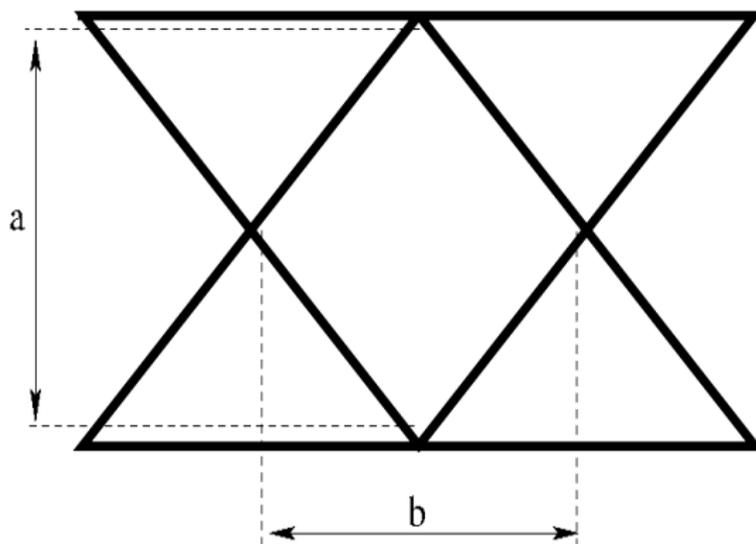
$$= \frac{\sum_{n \neq 0} |r(nT)|}{|r(0)|} \quad , \quad \text{si } a_n \in \{-1, +1\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{\max} \geq 1 \implies \text{IES provoque une erreur de détection} \\ D_{\max} < 1 \implies \text{Condition nécessaire pour la bonne} \\ \quad \quad \quad \text{réception du message} \end{array} \right.$$

Diagramme de l'œil



En l'absence d'IES, l'œil est complètement "ouvert" à l'instant de décision ; tous les trajets passent par deux points seulement (en binaire, M points en M-aires).



(a) Ouverture verticale : immunité au bruit

(b) Ouverture horizontale : immunité au déphasage d'horloge

- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- 4 Filtrage adapté
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist**
 - Interférence entre symboles (IES)
 - **Cas idéal - Filtre de Nyquist**
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

Cas idéal - Filtre de Nyquist

C'est le cas $D_{\max} = 0$.

Cela revient à :

$$\begin{cases} r(kT) = 0, \forall k \neq 0 \\ r(0) \neq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, le filtre, de R.I. $r(t)$, est dit de Nyquist.

Remarque : La condition de Nyquist est trivialement satisfaite lorsque l'impulsion $h(t)$ est de durée plus petite que T , et donc $|\text{Supp}(h)| \leq 2T$

Critère de Nyquist fréquentiel

Le critère de Nyquist implique que :

$$\sum_n r(t - nT) = r(t) \sum_n \delta(t - nT) = r(0)\delta_t$$

soit, dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{r}(f) * \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = r(0)$$

soit,

$$\sum_n \hat{r}\left(f - \frac{n}{T}\right) = T r(0)$$

c'est-à-dire, \hat{r} doit être constant sur une largeur de bande $B \geq \frac{1}{2T}$.

On appelle bande de Nyquist la largeur de bande minimale :

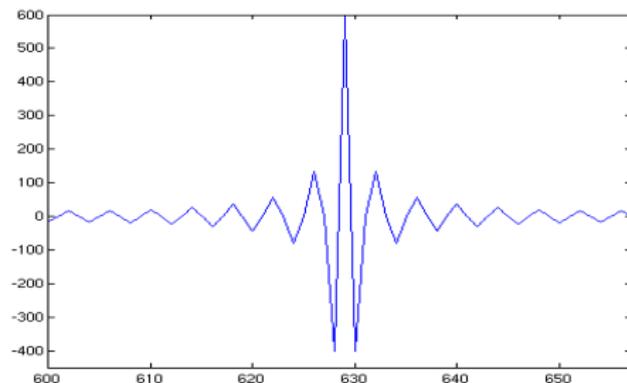
$$B_{\min} = \frac{1}{2T}$$

Choix le plus simple :

$$R(f) = Tr(0) \text{Rect}_{1/T}(f) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

On a alors,

$$r(t) = r(0) \text{sinc} \left(\frac{t}{T} \right)$$



Inconvénients des filtres de Nyquist

A l'instant d'échantillonnage exact $t = kT$, on a

$$r(kT) = \text{sinc}(kT) = 0 \quad , \quad \text{mais } r(0) = 1$$

c'est-à-dire, $D_{\max} = 0$.

Mais, si l'instant d'échantillonnage est nettement moins précis à la réception : $t = kT + \varepsilon$, avec $\varepsilon \neq 0$, alors,

$$\sum_k \left| \text{sinc} \left(k\pi + \frac{\pi\varepsilon}{T} \right) \right| = +\infty$$

⇒ Aucune tolérance vis-à-vis de l'instant d'échantillonnage

- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- 4 Filtrage adapté
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist**
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - **Filtre en cosinus surélevé**
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

Filtre en cosinus surélevé

Si $a_{k+1} = -a_k$, alors, $\sum_n a_n r(t - nT)$ doit s'annuler entre kT et $(k+1)T$,

le cas optimal étant : $\sum_n a_n r(t - nT) = 0$ pour $t = (k + \frac{1}{2}) T$

1^{ère} solution : $r((k + \frac{1}{2}) T) = 0 \implies r(t) = \text{sinc}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

2^{ème} solution : On impose

$$r(t) = \begin{cases} \frac{r(0)}{2} & , \quad \text{si } t = \pm \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } t = \pm T, \pm \frac{3}{2}T, \pm 2T, \dots, \pm \frac{kT}{2} \end{cases}$$

De cette façon, on a, en $t = \left(k + \frac{1}{2}\right) T$

$$\begin{cases} \text{si } a_{k+1} = -a_k, & \frac{r(0)}{2} - \frac{r(0)}{2} = 0 \\ \text{si } a_{k+1} = a_k, & \pm \left(\frac{r(0)}{2} + \frac{r(0)}{2} \right) = \pm r(0) \end{cases}$$

La fonction

$$r(t) = \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{T}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right) \right]$$

vérifie ce critère, et on a :

$$r(t) = r(0) \frac{\operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi t}{T} \right)}{1 - \left(\frac{2t}{T} \right)^2} = r(0) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi t}{T} \right) \operatorname{cosc} \left(\frac{\pi t}{T} \right)$$

avec la fonction cosinus cardinal : $\text{cosc}(x) = \frac{\cos x}{1 - x^2}$

\implies On a alors une décroissance en $\frac{1}{n^2}$ (et $\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty$)

Dans le domaine fréquentiel, fonction de transfert associée est :

$$R(f) = \frac{Tr(0)}{2} [1 + \cos(\pi fT)] \quad , \quad |f| \leq \frac{1}{T}$$

“1 + cos” : Filtre en cosinus surélevé

- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- 4 Filtrage adapté
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist**
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé**
 - Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée

Filtre en racine de cosinus surélevé

Problème : $r(t)$ ainsi calculé est la R.I. globale du système,

$$r(t) = h(t) * h(-t)$$

→ Détermination de $h(t)$?

$$R(f) = \frac{Tr(0)}{2} [1 + \cos(\pi fT)] = Tr(0) \cos^2 \left(\frac{\pi fT}{2} \right)$$

$$\implies H(f) = \sqrt{Tr(0)} \cos \left(\frac{\pi fT}{2} \right)$$

tel que $R(f) = |H(f)|^2$. Alors,

$$H(f) = \sqrt{Tr(0)} \frac{e^{i\frac{\pi fT}{2}} + e^{i\frac{\pi fT}{2}}}{2} \text{Rect}_{2/T}(f)$$

La transformée de Fourier inverse donne alors la R.I.

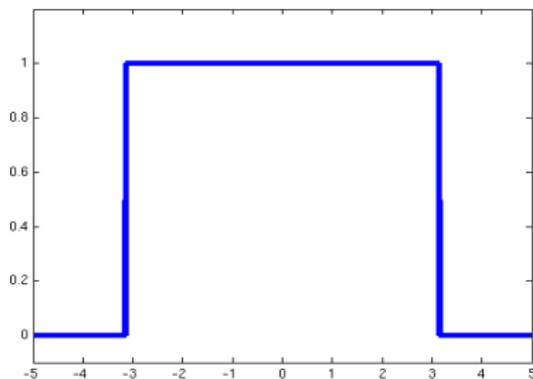
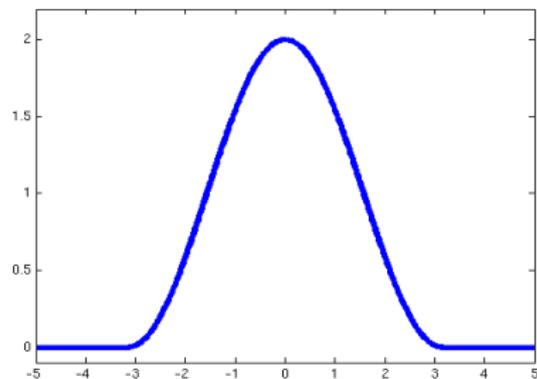
$$h(t) = \frac{\sqrt{Tr(0)}}{2} \left[\text{sinc} \left(\frac{2t}{T} - \frac{1}{2} \right) + \text{sinc} \left(\frac{2t}{T} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

soit aussi,

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \sqrt{Tr(0)} \text{cosc} \left(\frac{2t}{T} \right)$$

→ Problème : $h(t)$ ne vérifie pas le critère de Nyquist...

- 1 Généralités sur les filtres
- 2 Méthode de Fourier
- 3 Méthode séquentielle : Filtres RIF et RII
- 4 Filtrage adapté
- 5 Effet du bruit et probabilité d'erreur
- 6 Application : Critère et Filtre de Nyquist**
 - Interférence entre symboles (IES)
 - Cas idéal - Filtre de Nyquist
 - Filtre en cosinus surélevé
 - Filtre en racine de cosinus surélevé
 - **Filtre en cosinus surélevé avec coefficient de retombée**

Filtre de Nyquist : $R_0(f)$ Filtre en cosinus surélevé : $R_1(f)$ 

En pratique, on utilise un compromis entre R_0 et R_1 ,

$$R_\alpha, \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1, \text{ et } \begin{cases} R_\alpha = R_0, & \text{pour } \alpha = 0 \\ R_\alpha = R_1, & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

On remarque que pour $\alpha = 1$, on a

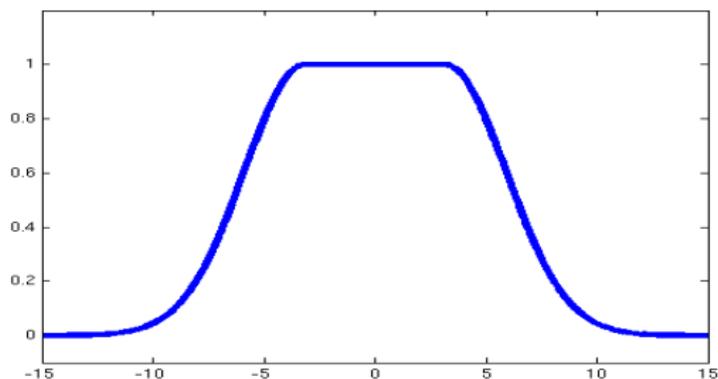
$$r(t) = \text{sinc} \left(\frac{\pi t}{T} \right) \text{cosc} \left(\frac{\pi t}{T} \right) = r_O(t)$$

$$\implies R(f) = R_0(f) * C(f)$$

$$\text{avec, } C(f) = \text{T.F.} \left(\text{cosc} \left(\frac{\pi t}{T} \right) \right) = \frac{\pi T}{2} \cos(\pi f T) \text{Rect}_{1/T}(f)$$

On remplace alors $C(f)$ par $\frac{1}{\alpha} C \left(\frac{f}{\alpha} \right)$,

$$R_\alpha = R_0(f) * \frac{1}{\alpha} C \left(\frac{f}{\alpha} \right)$$



En temporel, on a alors,

$$r_{\alpha}(t) = r_0(t) \operatorname{cosec} \left(\frac{\alpha t}{T} \right) = \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi t}{T} \right) \operatorname{cosec} \left(\frac{\alpha t}{T} \right)$$

et donc le compromis :

- Tolérance au bruit $\alpha = 0$
- Tolérance à l'instant d'échantillonnage $\alpha = 1$