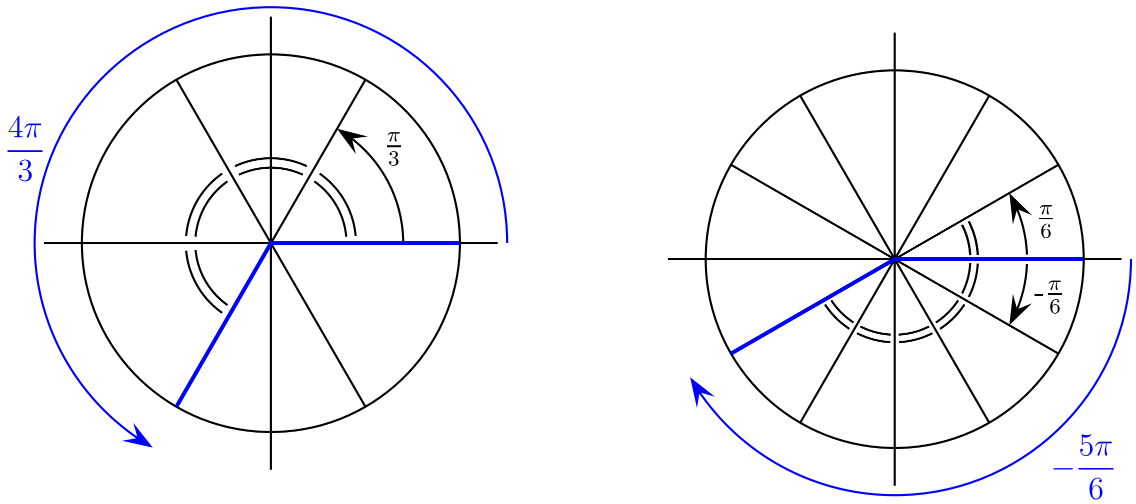
Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

a)



b) On retire deux tours : $\frac{13\pi}{4} - 2(2\pi) = -\frac{3\pi}{4}$ et donc la mesure principale de l'angle $\frac{13\pi}{4}$ est $-\frac{3\pi}{4}$

On ajoute un tour : $-\frac{8\pi}{3} + 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$ et donc la mesure principale de $-\frac{8\pi}{3}$ est $-\frac{2\pi}{3}$

Exercice 2

a) On a $f = u + 2 \times \frac{1}{v}$ avec $u(x) = x + 2$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = 2x + 3$ et donc $v'(x) = 2$ d'où $f' = u' + 2 \times \frac{-v'}{v^2}$, soit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2 \times \frac{-2}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{(2x+3)^2 - 4}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 12x + 5}{(2x+3)^2} \end{aligned}$$

b) On a $g = u^5$ avec $u(x) = 3x^2 - 3x + 17$ donc $u'(x) = 6x - 3$ et alors $g' = 5u'u^4$ soit

$$g'(x) = 5(6x-3)\left(3x^2 - 3x + 17\right)^4$$

c) On a $h = uv$ avec $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sqrt{3x+1}$ donc aussi $v = \sqrt{w}$ et donc $v' = \frac{w'}{2\sqrt{w}}$ soit $v'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ et enfin, $h' = u'v + uv'$ soit

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sqrt{3x+1} + x\frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \\ &= \frac{2(3x+1) + 3x}{2\sqrt{3x+1}} \\ &= \frac{9x+2}{2\sqrt{3x+1}} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

   a. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, et donc,

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	

   b. La fonction f est dérivable sur $[2; 3]$, strictement croissante, et telle que $f(2) = -2 < 0$ et $f(3) = 14 > 0$.
   On en déduit, d'après le théorème de la bijection, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2; 3]$.

   De plus, sur $]-\infty; 2]$, le maximum de f est $f(-1) = f(-2) = -2 < 0$, et donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
   De même, sur $[3; +\infty[$, la fonction est croissante et a pour minimum $f(3) = 14 > 0$, et l'équation $f(x) = 0$ n'y admet pas non plus de solution.
   En résumé, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, et cette solution appartient à l'intervalle $[2; 3]$.

   De plus, on calcule que $f(2,19) \simeq -0,07 < 0$ et $f(2,20) \simeq 0,05 > 0$, d'où l'encadrement

$$2,19 < a < 2,20$$

2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 2}{x^2}$.

   a. On a $g = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = x^3 + 3x + 2$, $u'(x) = 3x^2 + 3$, et $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$, d'où,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(3x^2+3)x^2 - (x^3+3x+2)(2x)}{x^4} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{x^4} \\ &= \frac{x^3 - 3x - 4}{x^3} = \frac{f(x)}{x^3} \end{aligned}$$

   b. On déduit de la question 1.c) le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	

   c. On a, par définition du nombre a, $f(a) = a^3 - 3a - 4 = 0 \iff a^3 = 3a + 4$
   On en déduit que

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{a^3 + 3a + 2}{a^2} \\ &= \frac{(3a+4) + 3a + 2}{a^2} \\ &= \frac{6a + 6}{a^2} \\ &= 6\frac{a+1}{a^2} \end{aligned}$$

On a vu de plus que $2,19 < a < 2,20$ et alors,

— d'une part $6(2,19+1) < 6(a+1) < 6(2,20+1)$

— et d'autre part $2,19^2 < a^2 < 2,20^2$ et alors $\dfrac{1}{2,20^2} < \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{2,19^2}$

et alors, en multipliant ces inégalités de termes positifs, on obtient

$$\frac{6(2,19+1)}{2,20^2} < \frac{6(a+1)}{a^2} < \frac{6(2,20+1)}{2,19^2}$$

et on trouve donc finalement l'encadrement

$$3,95 < g(a) < 4,00$$