Devoir de mathématiques

Exercice 1

a) f est une fonction polynôme ; $f'(x) = 3\times 5x^4 - \dfrac{1}{2}\times 4x^3 + 6 - 0$ et donc

$$f'(x) = 15x^4 - 2x^3 + 6$$

b) $f = uv$, avec $u(x) = 3x^2+5$ donc $u'(x) = 6x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

ainsi, $f' = u'v + uv'$, soit

$$f'(x) = 6x\sqrt{x} + \frac{3x^2+5}{2\sqrt{x}} = \frac{15x^2+5}{2\sqrt{x}}$$

c) $f = u + 7\dfrac{1}{v}$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, et $v(x) = 2x+1$ donc $v'(x) = 2$;

ainsi $f' = u' + 7\dfrac{-v'}{v^2}$, soit

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + 7\frac{-2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{-(2x+1)^2 - 14x^2}{x^2(2x+1)^2} \\ &= \frac{-18x^2-4x-1}{x^2(2x+1)^2} \end{aligned}$$

d) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2+3$ donc $u'(x) = 2x$, et $v(x) = 3-x$ donc $v'(x) = -1$;

ainsi $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, soit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(3-x) - (x^2+3)(-1)}{(3-x)^2} \\ &= \frac{-x^2+6x+3}{(3-x)^2} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. $f'(x) = 6x^2 - 2x - 4$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 100 > 0$ et admet donc deux racines $x_1 = 1$ (qui était aussi évidente) et $x_2 = -\dfrac{2}{3}$ et on a donc

x	$-\infty$		$-2/3$		1		$+\infty$
$6x^2-2x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

2. La tangente en $a = 1$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit, avec $f'(1) = 0$ et $f(1) = -2$, on obtient l'équation de la tangente (horizontale) : $y = -2$.

Exercice 3 $\quad f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x} - (-x+2) = \dfrac{x^2-2x+1}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x}$.

On dresse alors le tableau de signe de cette différence :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

et on a donc les positions relatives :

- $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty;0[$
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$
- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent au point d'abscisse 1.

Exercice 4 La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec, pour tout réel $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{8}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - 8}{x^2} \\ &= 2\frac{(x-2)(x+2)}{x^2} \end{aligned}$$

Le numérateur est du second degré, avec les racines (mises en évidence) $x = -2$ et $x = 2$, d'où le tableau de signes et de variations

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^2		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-8	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	8	$\nearrow$	