Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

a) $2x^2+5x+2=0$ est un trinôme du 2nd degré de discriminant $\Delta=9=3^2>0$ et admet donc deux racines réelles : $\mathcal{S}=\left\{-2\,;\,-\dfrac{1}{2}\right\}$

b) C'est le même trinôme que la question précédente et qui a deux racines 2 et $-\dfrac{1}{2}$. Ce trinôme est donc strictement négatif sur $\mathcal{S}=\left]-2;-\dfrac{1}{2}\right[$.

c) $x^2=7x \iff x^2-7x=x(x-7)=0$ qui est un produit nul, donc soit $x=0$ ou $x=7$, d'où les solutions $\mathcal{S}=\left\{0\,;\,7\right\}$

d) On cherche le signe du trinôme du dénominateur.
Son discriminant est $\Delta=11^2+4\times2\times6=169=13^2>0$.
Le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1=-6$ et $x_2=\dfrac{1}{2}$.
On peut alors dresser le tableau de signe de cette fraction :

x	$-\infty$		-6		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+2$		-	|	-	0	+	|	+	
$2x^2+11x-6$		+	0	-	|	-	0	+	
$\frac{3x+2}{2x^2+11x-6}$		-	||	+	0	-	||	+	

On en déduit les solutions de l'inéquation : $\mathcal{S}=\left]-6\,;\,-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

e) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x}\leqslant-2 \iff \dfrac{2x^2+8x+6}{x(x+2)}\leqslant0 \iff \dfrac{x^2+4x+3}{x(x+2)}\leqslant0$
Le numérateur est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta=4=2^2>0$ et admet donc deux racines réelles distinctes $x_1=-3$ et $x_2=-1$. On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
x^2+4x+3		+	0	-	|	-	0	+	|	+	
$x(x+2)$		+	|	+	0	-	|	-	0	+	
$\frac{x^2+4x+3}{x(x+2)}$		+	0	-	||	+	0	-	||	+	

Ainsi, $\mathcal{S}=[-3;-2[\cup[-1;0[$.

Exercice 2

1) On a $P(-1)=3(-1)^3-7(-1)^2-7(-1)+3=-3-7+7+3=0$, ce qui montre que -1 est bien une racine de P.
On en déduit que P se factorise par $\big(x-(-1)\big)=(x+1)$.
Soit donc $Q(x)=ax^2+bx+c$, alors on a : $P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$, d'où on déduit que $\left\{\begin{array}{l}a=3\\ a+b=-7\\ b+c=-7\\ c=3\end{array}\right.$, soit donc, $a=3$, $b=-10$ et $c=3$.

Ainsi, $P(x)=(x+1)(3x^2-10x+3)$. Le discriminant de $Q(x)$ est $\Delta=64$ et ses racines sont $x_1=\dfrac{1}{3}$ et $x_2=3$.
Les solutions de l'équation $P(x)=0$ sont donc : $\mathcal{S}=\left\{-1;\dfrac{1}{3};3\right\}$.

2) Le trinôme du dénominateur a pour discriminant $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$ et admet donc un unique racine $x_0 = \dfrac{-(-8)}{2 \times 2} = 2$.

À l'aide de la factorisation obtenue au 1), on a $f(x) = \dfrac{(x+1)(3x^2-10x+3)}{2x^2-8x+8}$ et les signes

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		-	0	+	|	+	|	+	|	+	
$3x^2-10x+3$		+	|	+	0	-	|	-	0	+	
$2x^2-8x+8$		+	|	+	|	+	0	+	|	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	‖	-	0	+	

On a alors, $f(x) \geq 0 \iff x \in [-1; \frac{1}{3}] \cup [3; +\infty[$