Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 $I_1 : e^{-3x+6} - 1 \geqslant 0 \iff e^{-3x+6} \geqslant 1 = e^0 \iff -3x+6 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$

On a $\dfrac{e^{5x+2}}{e^{2(x+1)}} = e^{5x+2-2(x+1)} = e^{3x}$

et donc $I_2 \iff e^{3x} - e^{-x+1} \geqslant 0 \iff e^{3x} \geqslant e^{-x+1} \iff 3x \geqslant -x+1 \iff x \geqslant \dfrac{1}{4}$

Exercice 2 On a $f = uv$ avec $u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^{3x^2}$ soit $v = e^w$ avec $w(x) = 3x^2$ donc $w'(x) = 6x$ et alors $v' = w'e^w$ soit $w'(x) = 6xe^{3x^2}$.

On a alors $f' = u'v + uv'$, soit

$$f'(x) = 2e^{3x^2} + 2x \times 6xe^{3x^2} = \left(12x^2 + 2\right) e^{3x^2}$$

On a $e^{3x^2} > 0$ et le premier terme est du second degré de discriminant $\Delta = 0 - 4 \times 12 \times 2 < 0$ et n'admet donc aucune racine réelle.

On a donc

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$12x^2+6$	$+$
e^x	$+$
$f'(x)$	$+$
g	$\nearrow$

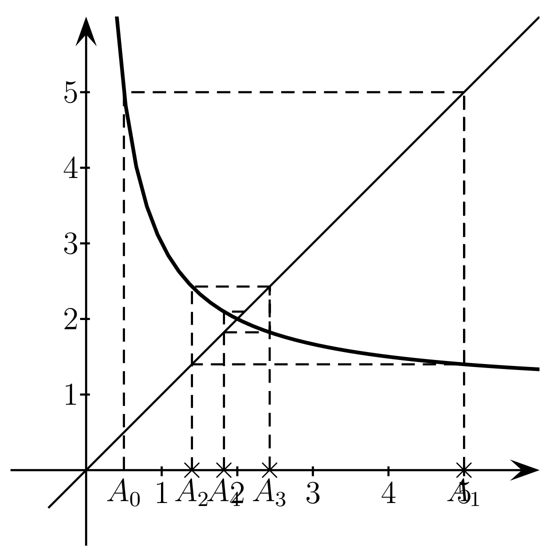
La tangente a pour équation $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$, soit avec $a = 0$,
$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$, donc ici, avec $f'(0) = 2e^0 = 2$ et $f(0) = 0$, on trouve l'équation $T_0 : y = 2x$

Exercice 3

a) $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} + 1 = 5.$

b) On a $f = 2 \times \dfrac{1}{x} + 1$ d'où $f'(x) = 2\dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-2}{x^2}$.
On trouve ainsi que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et donc que f est strictement décroissante sur cete intervalle.

c) On trace alors l'allure de la courbe et sur le graphique la droite d'équation $y = x$ et on construit les points demandés sur l'axe des abscisses.



d) La suite semble tendre vers l'abscisse du point d'intersection entre la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.
L'abscisse de ce point vérifie dont l'équation

$$f(x) = x \iff \frac{2}{x} + 1 = x$$

soit, en multipliant par $x \neq 0$ (car $x = 0$ n'est pas solution),

$$2 + x = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 9 = 3^2 > 0$ et admet donc deux solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.
La première solution $x_1 < 0$ n'est pas celle recherchée, et la seule limite éventuelle est donc $x_2 = 2$.

Exercice 4 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

a) $u_0 = \dfrac{2 \times 0 - 1}{0 + 1} = -1$; $u_1 = \dfrac{2 \times 1 - 1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2 \times 2 - 1}{2 + 1} = 1$

b) Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1) - 1}{(n+1) + 1} - \frac{2n-1}{n+1} \\ &= \frac{2n+1)}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1) - (2n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{3}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on a en particulier $n \geqslant 0$ et donc $(n+1) \geqslant 0$ et $(n+2) \geqslant 0$.
En particulier, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$ ce qui montre que la suite (u_n) est croissante.