Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4x + 3}$. On a $f = 3 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x^2 - 4x + 3$ et donc $u'(x) = 2x - 4$.
On trouve alors $f' = 3 \times \dfrac{-u'}{u^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{-3(2x-4)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$
Pour le dénominateur, on a $(x^2 - 4x + 3)^2 \geqslant 0$, avec le trinôme $x^2 - 4x + 3$ qui a pour discriminant $\Delta = 4 > 0$ et qui admet donc deux racines réelles distinctes $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.
On dresse alors le tableau de variation :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$		$-$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2-4x+3)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f		↗	‖	↗	-3	↘	‖	↘	

On a $A(0; f(0))$, soit $A(0; 1)$. La tangente en A a pour équation

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{4}{3}x + 1$$

Exercice 2 Soit les points $A(3;-2)$, $B(5;2)$ et $C(-1;1)$, on a donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-4) + 4 \times 3 = 4$
On a aussi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$,
avec $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{5} \times 5 \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

On a alors, en utilisant la question précédente,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 = 2\sqrt{5} \times 5 \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

soit aussi

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{4}{2\sqrt{5} \times 5} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

Avec l'aide de la caclulatrice, on trouve alors la valeur approché de l'angle $\widehat{BAC} \simeq 79,7°$

Exercice 3

a) On a $P(G) = \dfrac{180}{450} = 0,4$, $P(A) = \dfrac{144+72}{450} = \dfrac{216}{450} = 0,48$, $P(G \cap A) = \dfrac{72}{450} = 0,16$ et donc

$$P(G \cup A) = P(G) + P(A) - P(G \cap A) = 0,72$$

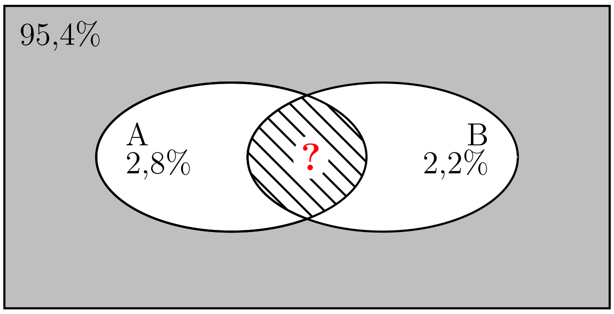
b) On a $P(G \cap A) = 0,16$ et $P(G) \times P(A) = 0,4 \times 0,48 = 0,192$, donc ces événements ne sont pas indépendants.

c) $P_G(A) = \dfrac{P(G \cap A)}{P(G)} = \dfrac{0,16}{0,4} = 0,4$.
Ainsi, sachant qu'on parle d'un garçon, la probabilité qu'il souhaite assister au concert est de 40%.

d) On cherche la probabilité conditionnelle

$$P_A(G) = \frac{P(A \cap G)}{P(A)} = \frac{0,16}{0,48} \simeq 0,33$$

Exercice 4 *(D'après Bac centres étrangers, 9 juin 2021)*
On note A et B les événements : "la puce a le défaut A" et "la puce a le défaut B", et l'énoncé se traduit alors par $P(A) = 2,2\%$, $P(B) = 95,4\%$ et $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 95,4\%$, ou encore le diagramme de Venn



En utilisant le diagramme de Venn précédent, on a $P(A \cup B) = 1 - 95,4\% = 4,6\%$ puis

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 2,8\% + 2,2\% - 4,6\% = 0,4\%$$

La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est donc de 0,4%.