Devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{x^2+3}{4x+1}$.

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = x^2+3 \\ v(x) & = 4x+1 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = 2x \\ v'(x) & = 4 \end{array}\right.$

On a donc, $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{2x(4x+1)-(x^2+3)\times 4}{(4x+1)^2} = \dfrac{4x^2+2x-12}{(4x+1)^2}$

Le trinôme du numérateur a pour discriminant : $\Delta = 2^2+4\times 4\times(-12) = 196 = 14^2 > 0$, et admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-2-14}{2\times 4} = -2$ et $x_1 = \dfrac{-2+14}{2\times 4} = \dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2+2x-12$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(4x+1)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

- $f(-2) = \dfrac{(-2)^2+3}{4\times(-2)+1} = -1$
- $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3}{4\times\left(\dfrac{3}{2}\right)+1} = \dfrac{\dfrac{21}{4}}{7} = \dfrac{3}{4}$

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est

$$T_a : y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Au point d'abscisse -2, on a (déjà ans le tableau de variation) $f'(-2) = 0$ et $f(-2) = -1$, d'où l'équation de la tangente horizontale

$$T_{-2} : y = -1$$

Au point d'abscisse 2, on calcule $f(2) = \dfrac{2^2+3}{4\times 2+1} = \dfrac{7}{9}$ et $f'(2) = \dfrac{4\times 2^2+2\times 2-3}{(4\times 2+1)^2} = \dfrac{17}{81}$ d'où l'équation de la tangente

$$T_2 : y = \frac{17}{81}(x-2)+\frac{7}{9} = \frac{17}{81}x+\frac{29}{81}$$

Exercice 2

a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$ d'où

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 2\times(-7)+(-7)\times(-2) = -14+14 = 0$$

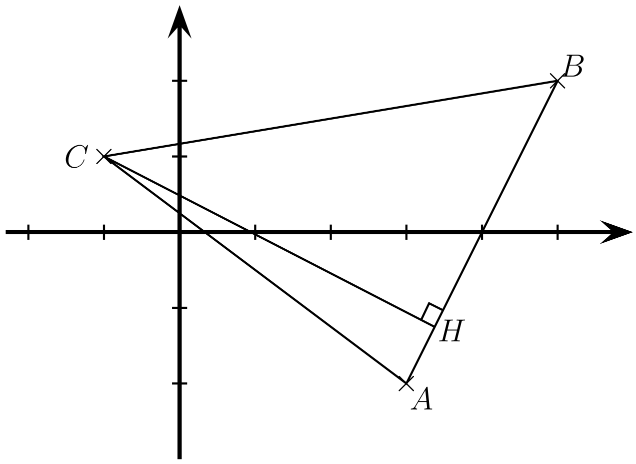
ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et donc que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

b) On a de plus $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CE}\right) = 2\times 14-(-7)\times(-4) = 0$$

ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et donc que les droites (AB) et (CE) sont parallèles.

Exercice 3



1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-4)+4\times 3=4$
2. On a aussi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$, avec $AB=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ et $AC=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$,
d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{5}\times 5\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

   On a donc, en utilisant la question précédente,
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4=2\sqrt{5}\times 5\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$
   soit aussi
$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{4}{2\sqrt{5}\times 5}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$
   Avec l'aide de la caclulatrice, on trouve alors la valeur approché de l'angle
$$\widehat{BAC}\simeq 79,7^\circ$$
3. On peut soit utiliser la trigonométrie dans le triangle rectangle AHC, dans lequel
$$\cos\hat{A}=\frac{AH}{AC}$$
   soit en utilisant les valeurs précédentes de AC et du cosinus,
$$\cos\hat{A}=\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{AH}{5}$$
   d'où $AH=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

   Deuxième méthode, avec le produit scalaire : comme H est le projeté orthogonal, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH$.

   On en déduit alors, en tuilisant le théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H,
$$\begin{aligned} & AC^2 &&=HC^2+AH^2\\ \iff\ & HC^2 &&=AC^2-AH^2\\ & &&=5^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{121}{5}\end{aligned}$$
   d'où
$$HC=\frac{11}{\sqrt{5}}$$