Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 $\boxed{\text{A}}$

1. On a : $\dfrac{19\pi}{3} - 6\pi = \dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{35\pi}{8} + 4\pi = -\dfrac{3\pi}{8}$.

   Les mesures principales des angles $\dfrac{19\pi}{3}$ et $-\dfrac{35\pi}{8}$ sont donc respectivement $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{3\pi}{8}$.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et donc $AB = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

   $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ et donc $BC = \sqrt{10^2 + (-4)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.

Exercice 1 $\boxed{\text{B}}$

1. On a : $\dfrac{31\pi}{8} - 4\pi = -\dfrac{\pi}{8}$ et $-\dfrac{22\pi}{3} + 8\pi = \dfrac{2\pi}{3}$.

   Les mesures principales des angles $\dfrac{31\pi}{8}$ et $-\dfrac{22\pi}{3}$ sont donc respectivement $-\dfrac{\pi}{8}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $AB = 7$

   $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $BC = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$.

On a $f = \dfrac{u}{v}$, avec $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x+1 \\ v(x) = x^2+3 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 2x \end{array}\right.$, et donc, $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\,(x^2+3) - (x+1)\,(2x)}{(x^2+3)} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)} \end{aligned}$$

Le trinôme du numérateur a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4(-1)(3) = 4^2 > 0$, et admet donc deux racines $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
(x^2+3)		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

Exercice 3

1. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

   a. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, et donc,

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	

   b. La fonction f est dérivable sur $[2;3]$, strictement croissante, et telle que $f(2) = -2 < 0$ et $f(3) = 14 > 0$.

   On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiares, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2;3]$.

   De plus, on calcule que $f(2,19) \simeq -0,07 < 0$ et $f(2,20) \simeq 0,05 > 0$, d'où $\underline{2,19 < a < 2,20}$.

   c. On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		1		a		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$		$-$					0	$+$	

2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 2}{x^2}$.

   a. On a $g = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = x^3 + 3x + 2$, $u'(x) = 3x^2 + 3$, et $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$, d'où,

$$g'(x) = \frac{(3x^2+3)x^2 - (x^3+3x+2)(2x)}{x^4} = \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x^3 - 3x - 4}{x^3} = \frac{f(x)}{x^3}$$

   b. On déduit de la question 1.c) le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	

   c. On a, par définition de a, $f(a) = a^3 - 3a - 4 = 0 \iff a^3 = 3a + 4$.

   On en déduit que

$$g(a) = \frac{a^3 + 3a + 2}{a^2} = \frac{(3a+4) + 3a + 2}{a^2} = \frac{6a + 6}{a^2} = 6\frac{a+1}{a^2}$$