Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

1. Le discriminant de ce trinôme du second degré est : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 0$.
   Le trinôme admet donc une unique racines réelles $x_0 = -2$.
   On a alors le le tableau de signe

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$3x^2 - 12x + 12$		$+$	0	$+$	

2. On calcule $P(-1) = 3(-1)^3 - 7(-1)^2 - 7(-1) + 3 = 0$, ce qui montre que -1 est bien une racine de P.

   On en déduit que P se factorise par $P(x) = (x - (-1))Q(x) = (x+1)Q(x)$, avec $Q(x) = ax^2 + bx + c$, et alors on a : $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$, d'où on déduit que $\begin{cases} a = 3 \\ a + b = -7 \\ b + c = -7 \\ c = 3 \end{cases}$, soit donc, $a = 3$, $b = -10$ et $c = 3$.
   Ainsi, $P(x) = (x+1)(3x^2 - 10x + 3)$.
3. Le trinôme $3x^2 - 10x + 3$ a pour discriminant $\Delta = 64$ et ses racines sont donc $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = 3$.

   En utilisant les résultats des deux questions précédentes, on obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		-	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$3x^2 - 10x + 3$		$+$	$\vert$	$+$	0	-	$\vert$	-	0	$+$	
$3x^2 - 12x + 12$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$h(x)$		-	0	$+$	0	-	$\Vert$	-	0	$+$	

Exercice 2 $\quad f(x) = 3x^5 - \dfrac{5}{2}x^2$ donc $f'(x) = 3 \times 5x^4 - \dfrac{5}{2} \times 2x = 15x^4 - 5x$

$g(x) = x^2\sqrt{x}$. On a $g = uv$ avec $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$, et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc $g' = u'v + uv'$, soit $g'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ou encore, sur le même dénominateur $g'(x) = \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x}}$.

$h(x) = \dfrac{3}{x+1} = 3 \times \dfrac{1}{x+1}$. On a $h = 3\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x + 1$ donc $u'(x) = 1$.

Donc $h' = 3\dfrac{-u'}{u^2}$ soit $h'(x) = 3\dfrac{-1}{(x+1)^2} = \dfrac{-3}{(x+1)^2}$.

$k(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$. On a $k = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x + 3$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = 2x + 1$ donc $v'(x) = 2$.

Donc, $k' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ soit $k'(x) = \dfrac{1(2x+1) - (x+3)2}{(2x+1)^2} = \dfrac{-5}{(2x+1)^2}$

Exercice 3

1. $f'(x) = 6x^2 - 2x - 4$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 100 > 0$ et admet donc deux racines $x_1 = 1$ (qui était aussi évidente) et $x_2 = -\dfrac{2}{3}$ et on a donc

x	$-\infty$		$-2/3$		1		$+\infty$
$6x^2 - 2x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. La tangente en $a = 1$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit, avec $f'(1) = 0$ et $f(1) = -2$, on obtient l'équation de la tangente (horizontale) : $y = -2$.