Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 On cherche le signe du trinôme du dénominateur.
Son discriminant est : $\Delta = 11^2 + 4 \times 2 \times 6 = 169 = 13^2 > 0$.
Le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1 = -6$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$.
On peut alors dresser le tableau de signe de cette fraction :

x	$-\infty$		-6		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+2$		-	|	-	0	+	|	+	
$2x^2+11x-6$		+	0	-	|	-	0	+	
$\frac{3x+2}{2x^2+11x-6}$		-	‖	+	0	-	‖	+	

On en déduit les solutions de l'inéquation : $\underline{\mathcal{S} = \left]-6\,;\,-\dfrac{2}{3}\right] \cup \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[}$

Exercice 2 L'équation réduite de (AB) est de la forme $y = mx + p$.
Le coefficient directeur est $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1-3}{6-(-2)} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$.
L'équation de la droite est donc maintenant $y = -\dfrac{1}{2}x + b$.
De plus $A(-2;3) \in (AB)$, d'où $3 = -\dfrac{1}{2}(-2) + b \iff b = 2$.
L'équation de (AB) est donc finalement $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.
La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en $M(x;y)$ tel que $y = 0$ et $y = 0 = -\dfrac{1}{2}x + 2 \iff x = 4$, donc au point $M(4;0)$.

Exercice 3 On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

1. $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ et donc 1 est bien une racine de P.
2. P se factorise selon
$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$
et donc $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) \iff \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -6 \\ c - b = 11 \\ -c = -6 \end{cases}$.
On trouve donc $a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$, ou encore $P(x) = (x-1)(x^2-5x+6)$.
3. $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 1 > 0$ et admet donc deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. On a alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	|	+	0	+	
$Q(x)$		+	|	+	0	-	0	+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	|	+	

On a alors $P(x) \geqslant 0 \iff x \in [1;2] \cup [3;+\infty[$.

Exercice 4 Les points d'intersection sont les points $M(x;y)$ tels que $y = f(x) = 2x - 1$, d'où l'équation du second degré $-2x^2 + x = 2x - 1 \iff 2x^2 + x - 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 9 = 3^2 > 0$ et qui admet donc deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = -1$.
Il y a donc deux points d'intersection : $M_1\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ et $M_2\,(-1;-3)$.