Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

1. a) On calcule $P(-1) = 3(-1)^3 - 7(-1)^2 - 7(-1) + 3 = 0$, ce qui montre que -1 est bien une racine de P.

   b) On déduit de la question précédente que P se factorise par $P(x) = (x-(-1))Q(x) = (x+1)Q(x)$, avec $Q(x) = ax^2+bx+c$, et alors on a : $P(x) = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$, d'où on déduit que $\begin{cases} a = 3 \\ a+b = -7 \\ b+c = -7 \\ c = 3 \end{cases}$, soit donc, $a = 3$, $b = -10$ et $c = 3$.
   Ainsi, $P(x) = (x+1)(3x^2 - 10x + 3)$.

   c) Le discriminant de $Q(x)$ est $\Delta = 64$ et ses racines sont $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = 3$.
   Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc : $\mathcal{S} = \left\{-1; \frac{1}{3}; 3\right\}$

2. Pour le trinôme du dénominateur, on a $3x^2 - 12x + 12 = 3\left(x^2 - 4x + 4\right) = 3(x-2)^2 \geqslant 0$.
   À l'aide de la factorisation obtenue au 1), on a le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		-	0	+	|	+	|	+	|	+	
$3x^2 - 10x + 3$		+	|	+	0	-	|	-	0	+	
$3x^2 - 12x + 12$		+	|	+	|	+	0	+	|	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	||	-	0	+	

On a alors,
$f(x) \geq 0 \iff x \in [-1; \frac{1}{3}] \cup [3; +\infty[$

Exercice 2 L'équation réduite de (AB) est de la forme $y = mx + p$.
Le coefficient directeur est $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{10-(-2)}{-6-2} = \dfrac{12}{-8} = -\dfrac{3}{2}$.
L'équation de la droite est donc maintenant $y = -\dfrac{3}{2}x + b$.
De plus $A(6; -2) \in (AB)$, d'où $-2 = -\dfrac{3}{2}(6) + b \iff b = 7$.
L'équation de (AB) est donc finalement $y = -\dfrac{3}{2}x + 7$.
La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en $M(x; y)$ tel que $y = 0$ et $y = 0 = -\dfrac{3}{2}x + 7 \iff x = \dfrac{14}{3}$, donc au point $M\left(\frac{14}{3}; 0\right)$.

Exercice 3
On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 + x - 3$ et $g(x) = x^2 - x$.
Soit $M(x; y)$ un éventuel point d'intersection, alors

$$y = 2x^2 + x - 3 = x^2 - x$$

En particulier

$$2x^2 + x - 3 = x^2 - x \iff x^2 + 2x - 3 = 0$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 > 0$ et admet donc donc deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$.
Il y a donc deux points d'intersection $A(1; f(1))$ soit $A(1; 0)$ et $B(-3; f(-3))$ soit $B(-3; 12)$.