Devoir de mathématiques

Exercice 1

1) Calculer la somme $S = 220 + 224 + 228 + \cdots + 1000$
2) Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_1 = 5150$ et $u_2 = 5304,5$.
   a) Déterminer la raison de cette suite ainsi que son premier terme u_0.
   b) Soit $S_{18} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{18}$.
   Donner la valeur excate de S_{18} puis sa valeur approchée au centième.

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n, par $u_{n+1} = 2 + 3u_n$.

a) Calculer u_1 et u_2.
   La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
b) On pose $v_n = u_n + 1$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
c) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3 Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traiterment de d'une maladie. L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(t) = 3te^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

   Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
   Quelle est alors cette quantité maximale ?
2. **a.** Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
   On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\,;\,10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

   b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
   Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de $30\,\%$ par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.
   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 4 On lâche une balle de 2m de hauteur. Cette balle rebondit à chaque fois à une hauteur égale aux trois quarts de la hauteur à laquelle elle a été lâchée.

1. Calculer la hauteur du 1^{er} rebond, puis la hauteur du $2^{\text{ème}}$ rebond.
2. On arrête cette balle au sommet du $20^{\text{ème}}$ rebond.
   Quelle est la hauteur de ce $20^{\text{ème}}$ rebond ?
   Quelle distance totale aura alors parcouru cette balle pendant ces 20 rebonds ?