Devoir de mathématiques

Exercice 1

1) Il s'agit de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4,

$$\begin{aligned} S &= 220 + 224 + 228 + \cdots + 1000 \\ &= 220 + (220+4) + (220+2\times 4) + \cdots + (220 + 195 \times 4) \end{aligned}$$

Il y a donc 196 termes dans cette somme, et donc

$$\begin{aligned} S &= 196 \times 220 + 4(1+2+\cdots+195) \\ &= 196 \times 220 + 4 \times \frac{195 \times 196}{2} = 119\,560 \end{aligned}$$

2) Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_1 = 5150$ et $u_2 = 5304,5$.

a) La raison de cette suite est $q = \dfrac{u_2}{u_1} = 1,03$, et le premier terme est alors $u_0 = \dfrac{u_1}{q} = 5000$.

b)

$$\begin{aligned} S_{18} &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{18} \\ &= 5000 + 5000 \times 1,03 + 5000 \times 1,03^2 + \cdots + 5000 \times 1,03^{18} \\ &= 5000\big(1 + 1,03 + 1,03^2 + \cdots + 1,03^{18}\big) \\ &= 5000\frac{1 - 1,03^{19}}{1 - 1,03} \\ &= 5000\frac{1,03^{19} - 1}{0,03} \\ &\simeq 125\,584,34 \end{aligned}$$

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n, par $u_{n+1} = 2 + 3u_n$.

a) $u_1 = 2 + 3u_0 = 2$ et $u_2 = 2 + 3u_1 = 8$
Cette suite ne peut pas être arithmétique car $u_1 - u_0 = 2$ est différent de $u_2 - u_1 = 6$.
Elle ne peut pas être géométrique non plus car on aurait alors $u_1 = qu_0 = 0$ ce qui n'est pas le cas.

b) Pour tout entier n, on a $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2 + 3u_n + 1 = 3(1 + u_n) = 3v_n$.
Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 1$.
On en déduit que, pour tout entier n, $v_n = v_0 q^n = 3^n$.
Comme $v_n = u_n + 1$, on a alors $u_n = v_n - 1 = 3^n - 1$.

Exercice 3 *D'après Bac 2022, épreuve de spécialité*

Partie A : Étude du premier protocole

1. On a $f = uv$ avec $u(t) = 3t$ donc $u'(t) = 3$ et $v(t) = e^{-0,5t+1} = e^{w(t)}$ avec $w(t) = -0,5t + 1$ donc $w'(t) = -0,5$ et alors $v'(t) = w'(t)e^{w'(t)} = -0,5e^{-0,5t+1}$.
On obtient alors $f' = u'v + uv'$, soit

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3e^{-0,5t+1} + 3t \times \left(-0,5e^{-0,5t+1}\right) \\ &= 3e^{-0,5t+1}\,(1 - 0,5t) \\ &= 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1} \end{aligned}$$

On a alors le signe de lé dérivée et le sens de variation :

t	0		2		10
$-0,5t+1$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,5t+1}$		$+$	|	$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Selon cette modélisation, la quantité maximale de médicament présente dans le sang du patient sera de $f(2) = 3 \times 2e^0 = 6$ mg, au bout de 2 heures.

2. **a.** Sur $[0\,;2]$, la fonction f est continue (car même dérivable), strictement croissante, avec $f(0) = 0 < 5$ et $f(2) = 6 > 5$, et ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), on sait donc qu'il existe une unique solution α à l'équation $f(t) = 5$.

Avec la calculatrice, par balayage par exemple, on touve $1,02 < \alpha < 1,03$ soit, $\alpha \simeq 1,02$.

b. On peut compléter le tableau de variation :

t	0	α	2	β	10
f	↗	5		5	↘

grâce auquel on trouve que la durée d'efficacité du médicament est donc de $\beta - \alpha \simeq 3,46 - 1,02 = 2,44$ soit 2,44 heures, ou encore 2 heures et 26 minutes.

Partie B : Étude du deuxième protocole

1. Selon cette modélisation, à la première heure la quantité dans le sang a diminué de 30%, il en reste donc $0,7 \times 2 = 1,4$ mg. On réinjecte de plus une nouvelle dose de 1,8 mg, et on trouve donc que

$$u_1 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2$$

2. De même que précédemment, à la (n+1)-ème heure, la quantité dans le sang présente l'heure précédente, soit u_n a diminué de 30%, soit $0,7u_n$, et on réinjecte, donc ajoute, 1,8 mg.
On obtient donc bien la relation $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. **a.** Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 6 - u_{n+1} \\ &= 6 - (0,7u_n + 1,8) \\ &= 4,2 - 0,7u_n \\ &= 0,7\,(6 - u_n) = 0,7v_n \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite (v_n) est bien géométrique de raison $0,7$ et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 4$.

b. On en déduit alors que, pour tout entier n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$$

puis, comme $v_n = 6 - u_n \iff u_n = 6 - v_n$, que

$$u_n = 6 - 4 \times 0,7^n$$

c. On arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg, soit lorsque

$$u_n \geqslant 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geqslant 5,5$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve que $n \geqslant 6$. Comme on réalise une injection par heure, il faut donc en réaliser 6.

Remarque : en utilisant la fonction logarithme népérien, on trouve plus précisément que

$$u_n \geqslant 5,5 \iff n \geqslant \frac{\ln(0,125)}{\ln(0,7)} \simeq 5,8$$

Exercice 4

1. On note h_n la hauteur, en mètres, du n-ième rebond. On a $h_0 = 2$, et la hauteur du 1^{er} rebond $h_1 = \dfrac{3}{4}h_0 = \dfrac{3}{2} = 1,5$, puis celle du $2^{\text{ème}}$ rebond $h_2 = \dfrac{3}{4}h_1 = \dfrac{9}{8} = 1,125$

2. La suite (h_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$, et alors, au $20^{\text{ème}}$ rebond, on a

$$h_{20} = h_0 q^{20} = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{20} \simeq 0,006$$

soit une hauteur d'environ 0,6cm.

En l'arrêtant au sommet du $20^{\text{ème}}$ rebond, la balle aura parcouru h_0, puis deux fois h_1 (monté puis descente) puis deux fois h_2, ..., jusqu'à une fois h_{20} (on l'arrête cette fois au sommet, et elle ne redescend donc pas). La distance totale parcourue est donc

$$d = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \cdots + 2h_{19} + h_{20}$$

soit

$$d = 2\big(h_0 + h_1 + \cdots + h_{20}\big) - h_0 - h_{20}$$

La première somme vaut

$$\begin{aligned} h_0 + \cdots + h_{20} &= h_0\left(1 + q + \cdots + q^{20}\right) \\ &= h_0 \frac{1-q^{21}}{1-q} \\ &= 2\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{21}}{1-\frac{3}{4}} \\ &= 8\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{21}\right) \end{aligned}$$

et la distance totale parcourue est alors

$$\begin{aligned} d &= 2\times 8\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{21}\right) - 2 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^{20} \\ &\simeq 13,96 \end{aligned}$$

soit un peu moins de 14 mètres parcourus.