Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 a) $2x^2+5x+2=0$ est un trinôme du 2nd degré de discriminant $\Delta=9=3^2>0$ et admet donc deux racines réelles : $\mathcal{S}=\left\{-2\,;\,-\dfrac{1}{2}\right\}$

b) $x^2=7x \iff x^2-7x=0 \iff x(x-7)=0$ soit $x=0$ ou $x=7$.

c) $-x^2+7x-3=5-2x \iff x^2-9x+8=0$

$\Delta=49=7^2>0$, donc l'équation admet deux racines réelles distinctes : $x_1=8$ et $x_2=1$.

d) C'est le trinôme du a) qui a deux racines 2 et $-\dfrac{1}{2}$. Ce trinôme est donc strictement négatif sur $\mathcal{S}=\left]-2;-\dfrac{1}{2}\right[$.

e) On cherche le signe du trinôme du dénominateur.

Son discriminant est $\Delta=11^2+4\times2\times6=169=13^2>0$.

Le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1=-6$ et $x_2=\dfrac{1}{2}$.

On peut alors dresser le tableau de signe de cette fraction :

x	$-\infty$		-6		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+2$		-	|	-	0	+	|	+	
$2x^2+11x-6$		+	0	-	|	-	0	+	
$\frac{3x+2}{2x^2+11x-6}$		-	‖	+	0	-	‖	+	

On en déduit les solutions de l'inéquation : $\mathcal{S}=\left]-6\,;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Exercice 2 Soit $f(x)=x^2+mx+m$, où m désigne un nombre réel.

1. $f(1)=1^2+m+1=1+2m=0 \iff m=-\dfrac{1}{2}$.

   Le produit des racines valant $\dfrac{c}{a}=m=-\dfrac{1}{2}$, on en déduit que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{2}$.
2. f admet deux racines distinctes si et seulement si $\Delta>0$, soit $\Delta=m^2-4m>0$.

   Δ est un trinôme du second degré qui a pour racines évidentes 0 et 4, et qui est positif à l'extérieur de ses racines.

   Ainsi, f admet 2 racines $\iff \Delta>0 \iff m\in]-\infty;0[\cup]4;+\infty[$.
3. $f(x)>1 \iff x^2+mx+(m-1)>0$.

   Ce trinôme est toujours positif (ne change jamais de signe, et en particulier ne s'annule jamais) si $\Delta=m^2-4(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2<0$, ce qui est impossible, un carré étant toujours positif ou nul.

   Ainsi, il n'existe pas de valeur de m telle que $f(x)>1$ pour tout réel x.