Introduction à la notion de limite

Première générale
spécialité maths

Exercice 1 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$.

On s'intéresse à la question suivante : Que devient $f(x)$ lorsque x devient très grand ?

1. Représenter la courbe sur la calculatrice et observer son comportement pour des grandes valeurs de x. Préciser ces observations en dressant le tableau de variation de f.
2. La fonction décroît pour des valeurs grandes de x : jusqu'à quelle valeur ?
   a) Jusqu'à 0 ? Déterminer si on peut avoir $f(x)=0$.
   b) Jusqu'à 1 ? Déterminer si on peut avoir $f(x)=1$.
   c) Jusqu'à 2 ? Déterminer si on peut avoir $f(x)=2$.
   d) Jusqu'à 3 ? Déterminer si on peut avoir $f(x)=3$.
   e) Jusqu'à 2,5 ? Déterminer si on peut avoir $f(x)=2,5$.
   f) Jusqu'à 2,1 ? Déterminer si on peut avoir $f(x)=2,1$.
   g) Soit un petit nombre $\varepsilon=10^{-n}$, pour un entier n. Déterminer si on peut avoir $f(x)=2+\varepsilon$.

Exercice 2 Essayer de déterminer les limites, lorsque x tend vers $+\infty$ de

$f(x)=6x^2+\dfrac{3}{x}+1$ $\quad$ $g(x)=\dfrac{3x^2+1}{2x^2-3}$ $\quad$ $h(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-2}$ $\quad$ $k(x)=3x^2-x+2$

Exercice 3 **Avec la fonction exponentielle**

Tracer la courbe de la fonction exponentielle et donner les limites $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$, et $\lim\limits_{x\to0}e^x$

Essayer de déterminer les limites, lorsque x tend vers $+\infty$ de

$f(x)=e^{-x}$ $\quad$ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ $\quad$ $h(x)=-xe^{x^2}$ $\quad$ $k(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+2}$

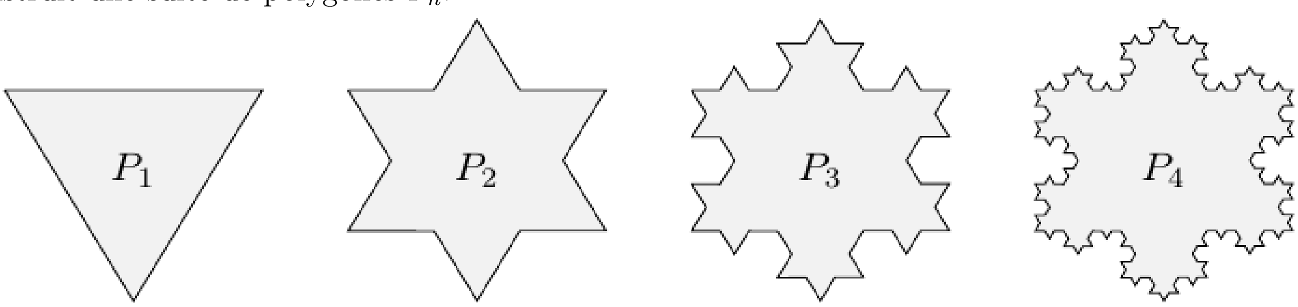
Exercice 4 Essayer de déterminer les limites, lorsque l'entier naturel n tend vers $+\infty$ de :

$u_n=3n-2$ $\quad$ $v_n=-5n+\dfrac{2}{n}+3$ $\quad$ $w_n=\dfrac{2n+1}{n-3}$ $\quad$ $x_n=0,2^n$ $\quad$ $y_n=\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$

Exercice 5 On considère un polygone équilatéral P_1, à trois côtés de longueur 1.

À partir de ce polygone P_1, on construit le polygone P_2 de la façon suivante : chaque côté est divisé en trois parties égales et on construit à partir du segment situé au milieu de chaque côté un nouveau triangle équilatéral à l'extérieur de P_1.

En procédant de la même façon à partir de P_2, on trouve un polygone P_3, puis en itérant le processus, on construit une suite de polygones P_n.

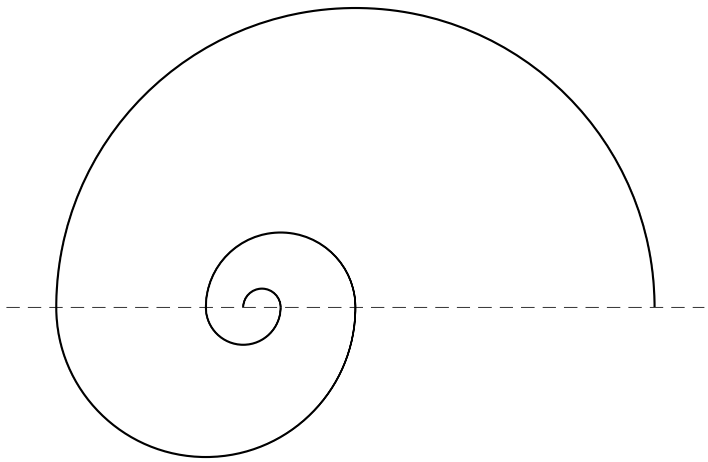


a) On note c_n le nombre de côtés du polygone P_n. Donner l'expression de c_n en fonction de n.

b) On note l_n la longueur d'un côtés du polygone P_n. Donner l'expression de l_n en fonction de n.
En déduire, en fonction de n, le périmètre p_n du polygone P_n.
Quel est le comportement de p_n lorsque $n \to +\infty$?

c) On note A_n l'aire du polygone P_n.
Quel est le sens de variation de la suite (A_n).
Donner un majorant de la suite (A_n), c'est-à-dire un nombre réel M tel que $A_n \leqslant M$ pour tout entier n.
La suite des nombres A_n peut-elle tendre vers $+\infty$?

Exercice 6 On construit une spirale à partir de demi-cercles de la façon suivante :



Le premier demi-cercle a un rayon de 10 cm. Ensuite, chaque demi-cercle a un rayon égal à la moitié du demi-cercle précédent.

1. Quelle est la longueur de la spirale dessinée sur cette figure ?
2. Quelle est la longueur de cette spirale avec 10 demi-cercles ? avec 100 ? avec 1000 ? avec 10 000 ? Quelle est la limite de la longueur de cette spirale ?
3. Si on prolonge indéfiniment cette spirale, on constate qu'elle converge vers un point C. Où ce point C se trouve-t-il sur le grand segment initial ?

Exercice 7 Sans s'aider de la calculatrice dans un premier temps, dresser le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
Préciser toutes les limites, c'est-à-dire compléter "les extrémités de toutes les flèches" dans le tableau de variation. Tracer alors l'allure de la courbe de f.

Enfin, tracer la courbe sur la calculatrice et vérifier, ou non, la courbe obtenue.

Exercice 8 Même exercice avec la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x}{(x-2)^2}$.

Exercice 9 On considère une suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 4$.
En s'aidant de la suite auxiliaire $v_n = u_n - 12$, trouver la limite de la suite (u_n).
Tracer sur un graphique la courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{3}x + 4$ et retrouver graphiquement le résultat précédent (en particulier qui ne dépend pas de la valeur initiale u_0 de la suite)