Variables aléatoires

Première générale
spécialité maths

Table des matières

I - Rappels, échauffement . . .

Exercice 1 Deux élèves ont eu les notes suivantes :
Élève A : 9 ; 10 ; 15 ; 17 ; 11 ; 5 ; 3 ; 10
Élève B : 9 ; 10 ; 11 ; 10 ; 9 ; 10 ; 11 ; 10
Élève C : 12 ; 13 ; 9 ; 10 ; 9 ; 8 ; 9 ; 10
Comparer les notes de ces élèves en calculant leur moyenne.

Exercice 2 Un jeu consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
Pour jouer à ce jeu on mise 2 euros. Lorsqu'on obtient deux fois pile, on gagne 6 euros, et on gagne 3 euro pour deux fois face. Dans tous les autres cas, on ne gagne rien et on perd notre mise.
Représenter la situation à l'aide d'un arbre, et remplir un tableau des gains et de leur probabilité.
Ce jeu semble-t-il avantageux pour le joueur ? Combien gagne-t-il, ou perd-il, en moyenne sur une partie ?

II - Variables aléatoires

1) Définition et exemple

Définition *Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Une variable aléatoire sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$.*

Exemple :

Dans l'exercice 2, $\Omega = \left\{PP, PF, FP, FF\right\}$ et on définit la variable aléatoire X qui prend les valeurs $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ et $x_3 = -2$:

Événements	PP	FF	PF , FP
x_i	3	1	-2

Dans ce jeu, les probabilités nous intéressent particulièrement car il s'agit d'un jeu (ou une expérience) aléatoire :

Événements	PP	FF	PF , FP
x_i	3	1	-2
Probabilités	1/4	1/4	1/2

Définition *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est l'ensemble des probabilités des événements $\{X = x_i\}$ pour chaque valeur x_i prise par X :*

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exercice 3 Lors d'un examen, un élève doit répondre à un QCM. Ce QCM comporte trois questions et, pour chaque question, trois réponses différentes sont proposées, dont une seule est exacte.

1. Représenter toutes les issues possibles à l'aide d'un arbre.
2. Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une note totale négative est ramenée à 0.

   On appelle X le total des points que l'élève a obtenu pour cet exercice.
   Déterminer les différentes valeurs prises par X, et donner le tableau de la loi de probabilité de X

III - Espérance d'une variable aléatoire

Définition *Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité :*

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

*L'espérance est la moyenne des valeurs prises par X, **moyenne pondérée** par les probabilités.*

Exercice 4 Calculer l'espérance de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est :

x_i	-2	0	1	3
$p_i = P(X = x_i)$	0.4	0.2	0.3	0.1

Exercice 5 On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	-2	a	3
$P(X = x_i)$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3}{10}$	b

Déterminer les valeurs possibles de a et b pour que l'espérance de X soit 2.

Exercice 6 Donner l'espérance du QCM de l'exercice 3.

Exercice 7 Une société d'assurance classe les sinistres en trois catégories, A, B et C, pour lesquelles une étude statistique, parmi ses assurés, a établi les probabilités : $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,1$ et $P(C) = 0,02$.
Pour les victimes de ces sinistres, la société d'assurance rembourse respectivement 100 euros, 500 euros et 1500 euros.
Les assurés auprès de cette assurance paient tous la même cotisation annuelle.
On note X la variable aléatoire égale à la différence entre la cotisation et le remboursement.

Quel doit être le montant de la cotisation pour avoir $E(X) = 0$.

Exercice 8 Une usine fabrique des objets destinés à être commercialisés. Les objets fabriqués peuvent éventuellement avoir deux défauts, le défaut A et le défaut B.
On estime que, en moyenne à la sortie de cette usine, 15% des objets ont le défaut A, 7% ont le défaut B, et 3% ont les deux défauts à la fois.
Le coût de production d'un objet est de 30 euros. La réparation du défaut A revient à 5 euros, et la réparation du défaut B revient à 8 euros.

1. a) Quel est le pourcentage d'objets défectueux (c'est-à-dire ayant au moins un défaut) ?
   b) J'ai pris un objet à la sortie de cette usine et je m'aperçois qu'il a le défaut A. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi le défaut B.

2. On note X la variable aléatoire qui associe à un objet au hasard de la production son coût : fabrication et réparations éventuelles.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer $E(X)$ et interpréter la valeur trouvée.
   c) On suppose que tous les objets fabriqués sont vendus. Quel doit être le prix de vente de chaque objet pour que l'usine réalise un bénéfice de 20 euros par objet ?

Propriété ***Linéarité de l'espérance***
Pour tous réels a et b, on a

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

Exercice 9 Pour me rendre au travail, je prends le bus. Le trajet comporte 4 arrêts ; le bus ne s'y arrête pas forcément, ce qui rend mon trajet plus ou moins rapide.
On note S le nombre d'arrêts que le bus fait effectivement. Une étude statistique montre que la loi de probabilité de S est

x_i	0	1	2	3	4
$P(S=x_i)$	$0,05$	$0,15$	$0,3$	$0,35$	$0,15$

1. Calculer $P(S\geqslant 3)$ et interpréter dans le contexte de l'exercice.
2. Calculer $E(S)$ et interpréter ce résultat.
3. Le trajet direct, sans arrêt, dure 20 minutes. Chaque arrêt prend 3 minutes.
   On note T la variable aléatoire égale à la durée du trajet.
   a) Quelle relation lie S et T ?
   b) Déterminer le temps de trajet moyen pour me rendre à mon travail.
   c) Je monte dans le bus et j'ai 25 minutes pour arriver à mon travail à l'heure. Quelle est la probabilité que je sois en retard ?

IV - Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition
- *La* ***variance*** *de la variable aléatoire X est le nombre*

$$\begin{aligned}V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i-E(X)\right)^2\\ &= p_1\left(x_1-E(X)\right)^2+p_2\left(x_2-E(X)\right)^2+\cdots+p_n\left(x_n-E(X)\right)^2\end{aligned}$$

- *L'****écart-type*** *de X est le nombre $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.*

Exercice 10 Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire de l'exercice 4.

Exercice 11 Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est :

x_i	-3	-1	0	2	5
$P(Y=x_i)$	$0,2$	$0,1$	$0,4$	$0,25$	$0,05$

Propriété *Pour X une variable aléatoire et a et b deux réels, on a*

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

et donc

$$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

Démonstration: On a

$$V(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i\Big((ax_i+b) - E(aX+b)\Big)^2$$

or $E(aX+b) = aE(X)+b$, et donc

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\Big(ax_i+b-(aE(X)+b)\Big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i\Big(ax_i - aE(X)\Big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i a^2\Big(x_i - E(X)\Big)^2 \\ &= a^2\sum_{i=1}^{n} p_i\Big(x_i - E(X)\Big)^2 = a^2V(X) \end{aligned}$$

□

Exercice 12 On considère la variable aléatoire N dont la loi de probabilité est :

x_i	2	3	5	8
$P(N=x_i)$	$0,1$	$0,35$	$0,4$	$0,15$

a) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de N.

b) Les valeurs de N sont en fait les notes obtenues à un devoir noté sur 8.
Pour ramener ces notes sur 20, le professeur décide de simplement multiplier chaque note par 2 et d'y ajouter ensuite 4 points.
Déterminer l'espérance, variance et écart-type de ces nouvelles notes.

V - Exercices

Exercice 13 Un client cherche à joindre par téléphone un service de dépannage. La probabilité que son appel soit pris sans attente est de $0,25$. Si son appel n'est pas pris sans attente, le client raccroche son téléphone et fait une autre tentative.

Le client fait au maximum trois tentatives.

On note X la variable aléatoire égale au rang de son premier appel aboutissant sans attente. Si au bout de trois appels le client n'a pas réussi à joindre le service de dépannage sans attente, on convient alors que $X=0$.

On note R l'événement : "Le client est mis en relation avec le service de dépannage sans attente."

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
2. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ?
   Déterminer alors la loi de probabiltié de X (présenter les résultats dans un tableau).

3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X , et interpréter ce résultat.

Exercice 14 **Politique de naissances** Dans un pays fictif, on impose la loi de naissance suivante : chaque couple peut avoir au maximum trois enfants et ne peut avoir qu'un seul garçon.
On suppose que les probabilités de naissance garçon/fille sont égales, et que tout le monde respecte la loi (et donc ne cherche plus à avoir d'enfant après la naissance d'un garçon). On note X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants qu'a un couple, et F et G le nombre de filles et de garçons.

À l'aide d'un arbre de probabilité, donner les lois de probabilités de X, F et G.
En déduire $E(X)$, $E(F)$ et $E(G)$. Commenter.

Exercice 15 Un jeu de hasard sur ordinateur est conçu de la façon suivante :

— Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$

— Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$

— La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$

Pour tout entier naturel n non nul, on note l'événement G_n : "la n-ième partie est gagnée" et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc en particulier $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} - \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$
3. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

Exercice 16 Un joueur pioche dans un jeu de 52 cartes autant de cartes qu'il le désire sans les regarder. Une fois qu'il décide de s'arrêter, il prend connaissance de toutes les cartes qu'il a pioché. Si parmi elle, il a tiré l'as de pique, il perd 10 euros. Sinon, il gagne 1 euro par carte tirée.

Combien doit-il piocher de cartes pour maximiser son gain moyen ? Combien peut-il alors espérer gagner ?

Exercice 17 **Loi de Poisson - Exponentielle**
Au 19ème siècle, Denis Poisson publie son livre "Recherches sur la probabilité des jugments en matière criminelle et en matière civile" dans lequel il aborde une nouvelle loi de probabilité, qui restera connue par la suite comme la "loi de Poisson".
Pour un réel $\lambda > 0$, une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque, pour tout entier k naturel, $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, où $k!$ est le produit de tous les entiers de 1 à k (par exemple, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$, et on précise que, par convention $0! = 1$).

1. On suppose dans cette question que $\lambda = 0,1$. Calculer les probabilités $P(X = 2)$ et $P(X \leqslant 2)$.
2. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes qui suivent chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
   a) Calculer $P(X + Y = 0)$.
   b) Calculer de même $P(X + Y = 1)$ et $P(X + Y = 2)$.
   c) Quelle loi semble suivre la variable aléatoire $X + Y$?