Probabilités conditionnelles Indépendance

Première générale
spécialité maths

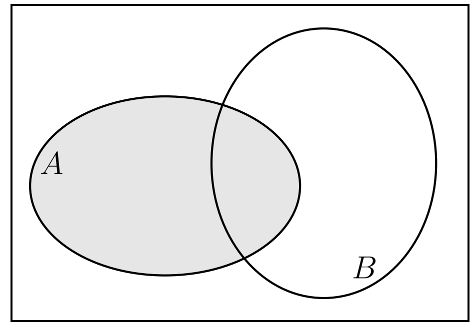
Les questions les plus importantes de la vie ne sont pour la plupart que des problèmes de probabilité.
Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827)

Table des matières

Toute connaissance dégénère en probabilité ;
et cette probabilité est plus ou moins grande,
en fonction de notre expérience de la vérité ou de la fausseté de notre compréhension,
et en fonction de la simplicité ou de la complexité de la question.
David Hume (1711-1776)

Notre cerveau a une tendance naturelle à penser que si, sous une hypothèse, des résultats sont peu probables alors l'hypothèse elle-même est peu probable.
Ce raisonnement est faux.

I - Rappels, échauffement ...



Exercice 1 On considère deux événements A et B.
On donne les probabilités : $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,2$ et $P(A\cap B) = 0,1$.

1. Reproduire et compléter le diagramme de Venn ci-contre.
2. Donner les probabilités $P(\overline{A})$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap \overline{B})$.

Exercice 2 Une étude dans une grande ville a donné les résultats suivants : 73 % des personnes ont un velo, 19 % ont des rollers et 17 % possèdent les deux.
On note R l'événement : "la personne a des rollers" et V :"la personne a un vélo".

1. Compléter le tableau :

	V	$\overline{V}$	Total
R			
$\overline{R}$			
Total			100%

2. On désigne une personne au hasard dans l'annuaire de la ville.
   a) Déterminer la probabilité que cette personne ait soit un velo soit des rollers.
   b) Déterminer la probabilité que cette personne n'ait ni velo ni roller ?
   c) Quelle est la probabilité que cette personne ait des rollers mais pas de velo ?
   d) La personne contactée affirme tout de suite posséder un vélo. Quelle est la probabilité qu'elle ait alors aussi des rollers ?
3. Je travaille dans un magasin de cycle. Un potentiel client entre dans mon magasin en rollers. Quelle est la probabilité qu'il ait déjà un vélo ?

Exercice 3

a) Je lance deux fois de suite une pièce bien équilibrée. Représenter la situation à l'aide d'un arbre.
Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois Pile exactement ?

b) Même question que précédemment mais en lançant cette fois trois de suite cette pièce.

II - Probabilités conditionnelles

1) Probabilités conditionnelles

Définition *Soit A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.*
La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On exprime alors, de manière équivalente, la probabilité de l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Exercice 4 La probabilité qu'un jeune réussisse l'examen du permis de conduire l'année de ses 18 ans est de 0,625 et celle qu'il soit reçu au baccalauréat cette même année est de 0,82.
De plus, la probabilité d'être à la fois reçu au baccalauréat et à l'examen du permis de conduire la même année est de 0,56.

1. Calculer la probabilité qu'un jeune soit reçu à au moins un des deux examens.
2. En déduire la probabilité qu'il ne soit reçu à aucun des deux examens.
3. Déterminer la probabilité qu'un jeune réussisse au baccalauréat sachant qu'il a déjà eu son permis la mı̂e année.

2) Indépendance

Définition *On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$.*
"Savoir que l'événement A est arrivé ne change pas la probabilité de l'événement B".

<u>Remarques :</u>
— Si A et B sont indépendants, on a aussi $P_B(A) = P(A)$.
— Ne pas confondre indépendance et incompatibilité *(A et B sont incompatibles, ou disjoints, lorsque $A \cap B = \emptyset$)* (et on a alors dans ce cas dans $P_B(A) = 0$).

Exercice 5 Dans un jeu de 52 cartes, on tire au hasard une carte et on considère les événements :
— A : "la carte tirée est un As"
— B : "la carte tirée est un pique"
— C : "la carte tirée est une figure (valet, dame, roi, ou as)"

a) Donner les probabilités de ces trois événements.
b) J'ai tiré une carte au hasard et j'ai entr'aperçu que la carte tirée est un pique. Quelle est la probabilité que ce soit un As.
Écrire cette probabilité en utilisant les événements A et B.
c) J'ai tiré une carte au hasard et j'ai entr'aperçu cette fois que la carte tirée est une figure. Quelle est alors la probabilité que ce soit un As.
Écrire cette probabilité en utilisant les événements A et C.
d) Que peut-on dire des événements A et B d'une part, et A et C d'autre part ?

Propriété *Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.*
Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants (et donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi).

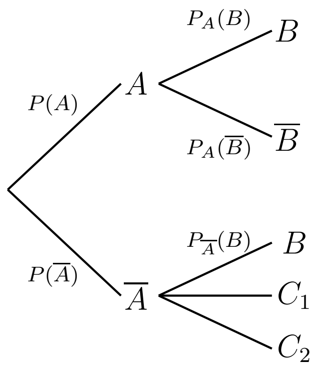
Exercice 6 Les probabilités des événements indépendants A et B sont $P(A) = 0,8$ et $P(B) = 0,5$.
Quelle est la probabilité $P(A \cup B)$?

Exercice 7 On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,35$ et $P(A \cap B) = 0,28$.

1. Montrer que A et B sont indépendants.
2. Calculer $P(A \cup B)$ puis $P(\overline{A} \cap B)$.

Exercice 8 Deux événements sont indépendants et ont, indépendamment donc, la même probabilité. De plus, il y a une chance sur quatre que ces deux événements se réalisent simultanément.
Quelle est la probabilité de ces événements ?

III - Arbre pondéré de probabilité



Règle 1. La somme des probabilités issues d'un nœud est égale à 1.

Règle 2. Probabilités conditionnelles
Sur chaque branche, on inscrit la probabilité conditionnelle : probabilité de l'événement de droite sachant celui de gauche.

Règle 3. Un chemin correspond à l'intersection des événements.
Sa probabilité est le produit des probabilités.

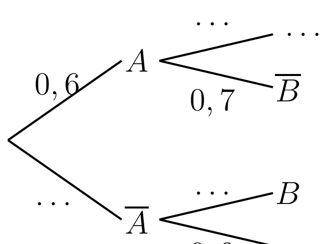
Règle 4. Probabilités totales
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

Exercice 9 Une branche présente 10 fleurs : 2 blanches et 8 roses.
On cueille, successivement et au hasard, 3 fleurs.

a) Représenter la situation par un arbe pondéré.

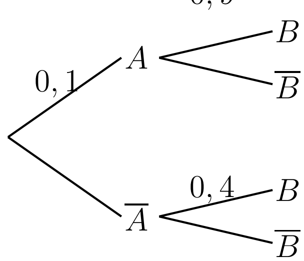
b) Quelle est la probabilité d'avoir 3 fleurs roses ?
Quelle est la probabilité d'avoir les 2 fleurs blanches ?

Exercice 10 On considère une expérience aléatoire modélisée par l'arbre ci-contre.



1. Compléter cet arbre.
2. Déterminer $P(A \cap B)$ et $P(B)$.
3. Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 11 Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre. On sait de plus que $P(B) = 0,39$.



1. Déterminer la probabilité de B sachant A.
2. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
3. Calculer la probabilité de A sachant B.

Exercice 12 Tous les élèves d'une promotion ont passé un test de certification en anglais.

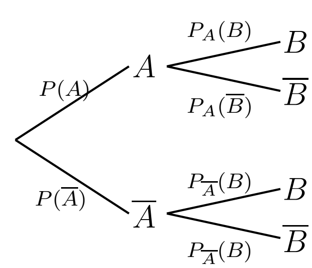
— 80 % ont réussi le test.
— Parmi ceux qui ont réussi le test, 95 % le passaient pour la 1ère fois.
— Parmi ceux qui ont échoué au test, 2 % le passaient pour la 1ère fois.

On considère les événements R :"l'élève a réussi au test", et F :"l'élève a passé le test plusieurs fois".

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilité et dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé le test pour la 1ère fois et l'ait réussi.
3. Déterminer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé plusieurs fois le test.
4. On choisit au hasard un élève ayant passé plusieurs fois le test. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi ?

Exercice 13 **Formule de Bayes.**
Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. Représenter la situation par un arbre et montrer la formule $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$,

puis $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$.



Exercice 14 **Applications de la formule de Bayes**

1. On dispose de 100 pièces de monnaie. Une pièce sur quatre est truquée. Une pièce truquée indique Pile avec une probabilité de $\dfrac{4}{5}$.

   On choisit au hasard une pièce parmi les 100, on la lance et on obtient Pile. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce truquée ?

2. Dans une population, une personne sur quatre triche. Lorsqu'on fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes à un tricheur, il tire à tous les coups un as.

   α) On demande à une personne au hasard de tirer une carte, quelle est la probabilité qu'un as soit tiré ?

   β) Un as a été tiré. Quelle est la probabilité que j'ai eu affaire à un tricheur ?

3. **Peur des coupures de courant ?**
   Le système électrique dans un bâtiment est quasi-certainement endommagé lors d'un incendie ; plus précisément, il y a 99 chances sur 100 pour que le courant soit coupé lors d'un incendie.

   Hors incendie, les normes électriques permettent d'avoir des systèmes assez fiables et la probabilité d'une coupure de courant reste de l'ordre d'une chance sur 1000.

   Enfin, statistiquement, un incendie se déclare tous les 3 ou 4 ans, c'est-à-dire que, plus précisément, un incendie survient un jour donné avec une probabilité de 10^{-3}.

   Les lumières viennent de s'éteindre brusquement ! Quelle est la probabilité pour que se soit un incendie ?

Exercice 15 **Voitures rouges volées**

Une étude statistique donne les valeurs : 20% des voitures sont rouges, 1% des voitures rouges se font voler. Pour les autres voitures, toutes couleurs confondues, le double se font voler, soit 2%.

a) Représenter la situation par un arbre.

b) Quelle est la probabilité qu'une voiture se fasse voler ?

c) Un ami m'annonce qu'il vient de se faire voler sa voiture. Quelle est la probabilité que sa voiture (ou plutôt son ancienne voiture, maintenant) ne soit pas rouge ?

Exercice 16 **Test de dépistage**

On définit, pour un test de dépistage d'une maladie :
— sa *sensibilité* : la probabilité qu'il soit positif si la personne est atteinte de la maladie (vrai positif).
— sa *spécificité* : la probabilité qu'il soit négatif si la personne est indemne de la maladie (vrai négatif).
— sa valeur prédictive positive (ou valeur diagnostique) : la probabilité que la personne soit réellement malade si son test est positif.
— sa valeur prédictive négative : la probabilité que la personne n'ait pas la maladie si son test est négatif.

Les deux premières sont des valeurs caractérisant un test, du point de vue du concepteur (laboratoire).
Les valeurs prédictives sont quant à elles des données intéressantes du point de vue de l'usager (patient).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :
— la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est $0,98$ (sensiblité du test) ;
— la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est $0,99$ (spécificité du test).

On notera par la suite les événements M :"l'individu est malade" et T :"le test est positif".

1. On utilise ce test pour dépister une maladie qui touche 30% de la population.

   a) Dresser un arbre pondéré décrivant la situation.

   b) Calculer la probabilité de l'événement T.

   c) Déterminer les valeurs prédictives positive et négative du test.

2. Calculer de même les valeurs prédictives positives de ce test pour une maladie qui toucherait 0,1% de la population.

Exercice 17 Oubli de la fréquence de base

Dans une ville d'un million d'habitants, 100 individus sont fichés dangereux. La mairie installe un système de surveillance algorithmique capable de détecter automatiquement le visage des personnes qui passent dans son champ. Bien sûr, comme tout système de mesure, celui-ci n'est pas infaillible : on suppose ici que le système est de bonne qualité avec un taux d'erreur de seulement 1%.
Une personne a commis un méfait dans le champ d'une caméra, et l'alarme s'est déclenchée.

Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un des délinquants listés ?

Avec le taux d'erreur annoncé, on est tenté de répondre 99%, et 1% d'erreur que ce ne soit pas un délinquant fiché…

Calculer ces probabilités exactement : à savoir la probabilité, une fois que l'alarme s'est déclenchée, que ce soit par un des délinquants fichés.
Calculer de même la probabilité, sachant que l'alarme s'est déclenchée, que ce soit du fait d'un citoyen non fiché comme délinquant.

Voir aussi, en complément, Oubli de la fréquence de base et exemples d'explication de préjugés