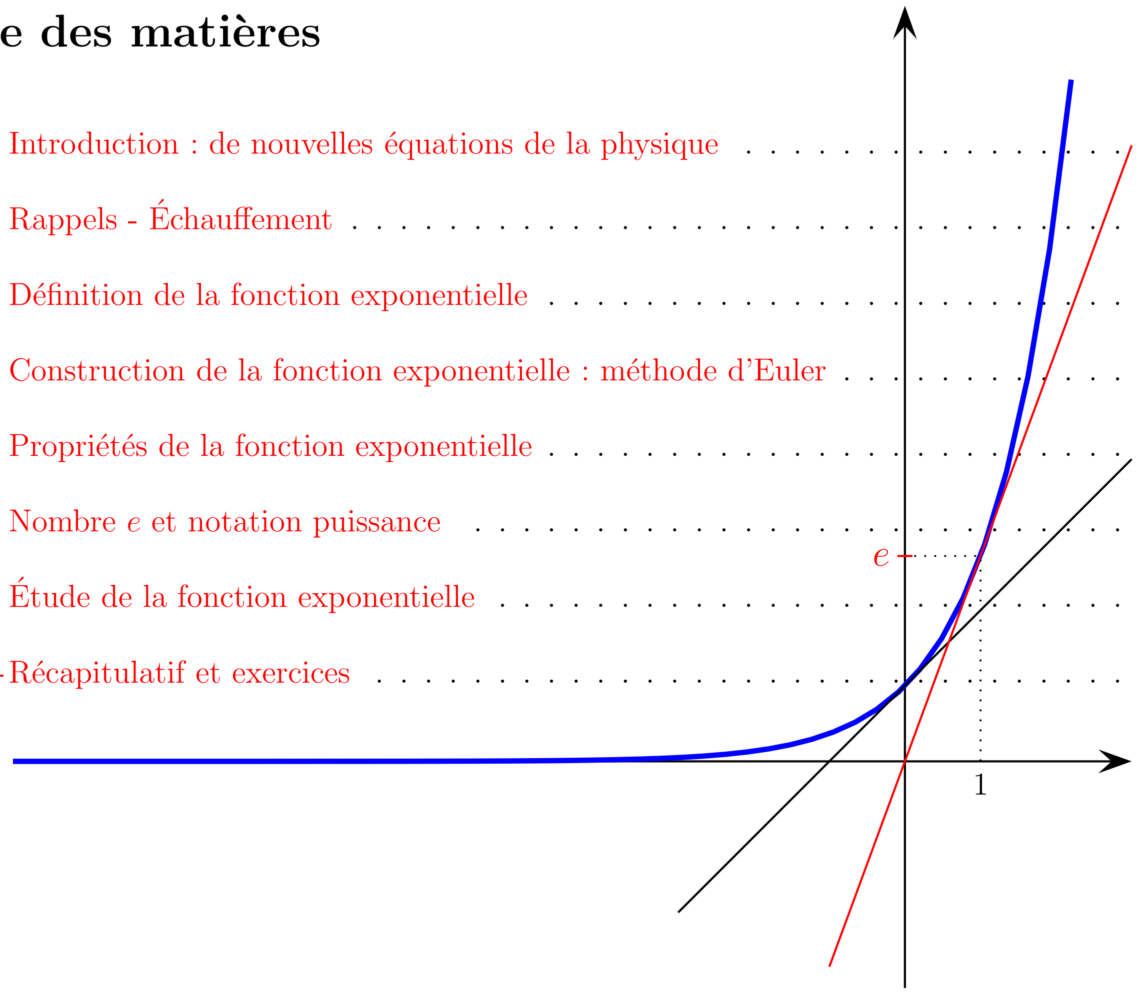
Fonction exponentielle

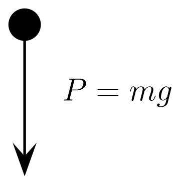
Première générale
spécialité maths

Table des matières



I - Introduction : de nouvelles équations de la physique

Chute d'un corps dans le vide



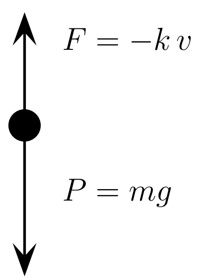
Si $v(t)$ désigne la vitesse du corps à l'instant t, alors l'accélération du corps est la dérivée $v'(t)$.
Dans le vide, le corps est soumis uniquement à la force de pesanteur son poids) et la loi de Newton (principe fondamental de la mécanique) donne :

$$mv'(t) = P = mg$$

soit aussi, $\boxed{v'(t) = g}$

Cette équation est une <u>équation différentielle</u>, c'est-à-dire une équation dont l'inconnue est une fonction et faisant intervenir les dérivées de la fonction recherchée.

Chute d'un corps dans un fluide visqueux



Pour fournir un modèle plus réaliste, on peut prendre en compte de plus les frottements ; ceux-ci peuvent-être modélisés par une force opposée au mouvement du corps, et inversement proportionnelle à sa vitesse.
La loi de Newton s'écrit alors :

$$mv'(t) = F + P = -kv(t) + mg$$

soit aussi, $\boxed{mv'(t) + kv(t) = mg}$

La fonction $v(t)$ est cette fois solution d'une équation différentielle reliant $v(t)$ et sa dérivée $v'(t)$.

Radioactivité A la toute fin du XIX ème siècle, Marie et Pierre Curie mettent en évidence des éléments radioactifs autres que l'uranium, le polonium et le radium.

Des atomes de ces éléments radioactifs se désintègrent en permanence.
Si on désigne par $N(t)$ le nombre d'atomes de radium à l'instant t, alors la quantité d'atomes qui se désintègrent à un instant donné est proportionnelle à la quantité d'atomes encore présente :

$$\boxed{N'(t) = -aN(t)}$$

En résolvant cette équation, on peut donc connaître à chaque instant t le nombre d'atome $N(t)$.

Ceci est par exemple appliqué pour la *datation au carbone 14* de matière organique.
Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Connaissant le nombre d'atomes de carbone 14 présents et qui se sont désintégrés, on détermine la durée qu'a pris cette désintégration, c'est-à-dire l'âge de la matière organique.

Ces équations sont des équations dont l'**inconnue est une fonction**. Ce sont des équations différentielles.

Dans toutes ces équations différentielles une fonction joue un rôle principal : il s'agit de la fonction solution de l'équation différentielle simple :

$$f' = f$$

autrement dit, une fonction égale à sa dérivée : c'est la <u>**fonction exponentielle**</u>.

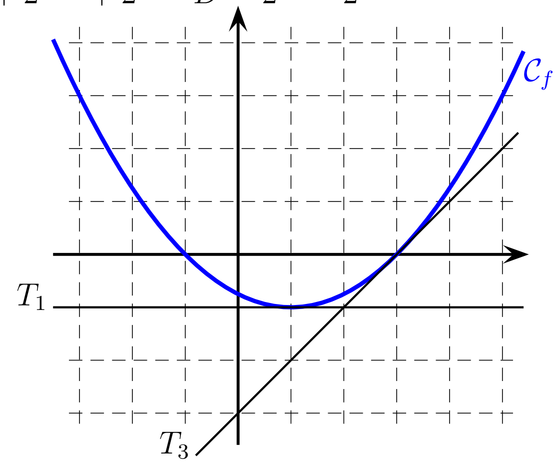
II - Rappels - Échauffement

Exercice 1 1. Soit n un nombre entier relatif. Simplifier les écritures suivantes :

a) $2^{-3} = \dots$ b) $5^{-3} \times 5^5$ c) $3^2 \times \dfrac{3^8}{3^3}$ d) $(10^6)^2 \times (10^{-3})^5$ e) $2^{2n} \times 2$ f) $2^{3n+1} \times 2^{-n+1}$

g) $\dfrac{2^{3n+1}}{2^{2n+1}}$ h) $(2^{n+1})^3 \times 2^{-1}$ i) $\dfrac{4^{n+2}}{2^{2n}} \times \frac{1}{8}$ j) $\dfrac{2^{n+3}}{4^{-n}} \times 2^{-n}$ k) $3^{2n}(3^{-2n} + 3^{-n})$

2. Factoriser : $A = 2^5 - 2^3$ $B = 2^{n+2} + 2^n$ $C = 2^{n+3} + 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n$ $D = 2^{2n} - 2^{n+1}$



Exercice 2 $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f. T_1 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives 1 et 3.

a) Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f(3)$ puis $f'(1)$ et $f'(3)$.

b) Rappeler l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

Donner les équations de T_1 et T_3.

Exercice 3 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, croissante et telle que $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 3$. Tracer une courbe $\mathcal{C}_f$ vérifiant ces données.

Exercice 4 Étudier les variations des fonctions suivantes, et tracer l'allure de leur courbe représentative :

a) $f(x) = x^3 - 4x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ c) $f(x) = 2x + \dfrac{3}{2x-1}$

III - Définition de la fonction exponentielle

Théorème _Equation $f' = f$_

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, *et est notée* **exp** : $x \mapsto \exp(x)$.

Démonstration: • **Existence :** admise

• **Unicité :** Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = f$, $f(0) = 1$ et $g' = g$, $g(0) = 1$.

On admet que de telles fonctions f et g ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$.

On cherche à montrer que ces deux fonctions f et g sont forcément la même fonction : $g = f$ ou encore que $\dfrac{g}{f} = 1$.

On note donc pour montrer cela h la fonction $h = \dfrac{g}{f}$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, avec, $h' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2} = \dfrac{gf - gf}{f^2} = 0$.

Ainsi, h est constante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, c'est-à-dire, pour tout x réel, $g(x) = f(x)$, et ainsi $g = f$. □

Exercice 5 Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de la fonction exponentielle aux points d'abscisse 0 ; 1 et 2.

IV - Construction de la fonction exponentielle : méthode d'Euler

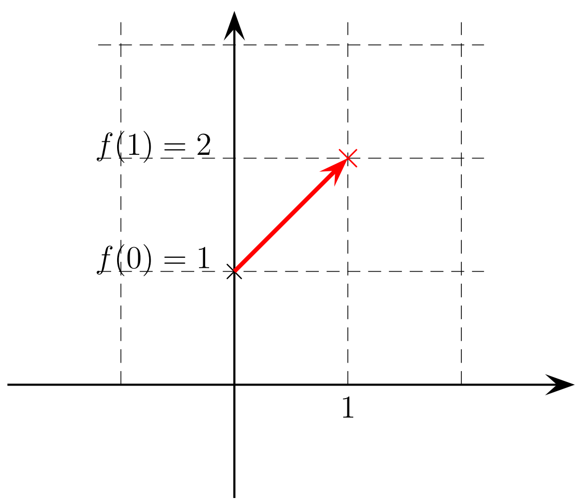
On cherche à résoudre de manière approchée l'équation $f'(x) = f(x)$, en partant de la condition initiale $f(0) = 1$.

Euler (1707 - 1783) donna une méthode de construction de cette fonction exponentielle. La construction complète et rigoureuse fait appel à des notions (suites et limites) qui ne sont pas encore vues à ce stade là en première générale.

On donne néanmoins l'idée de cette construction, de la méthode d'Euler.

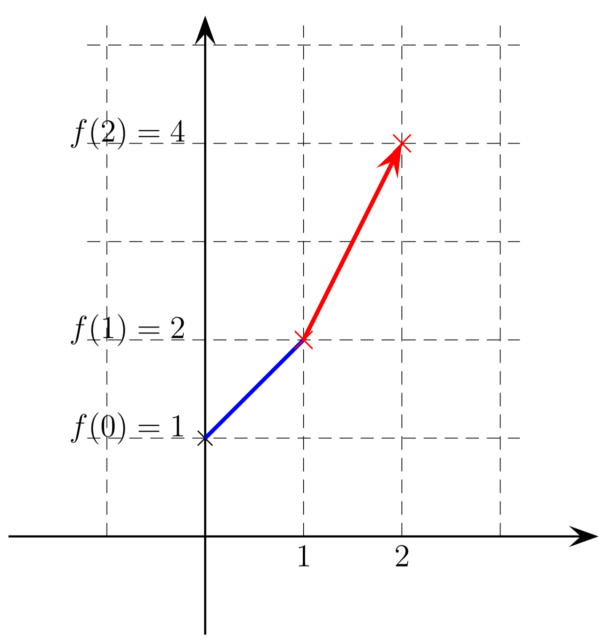
Au 18ème siècle, donc pour Euler, la mécanique (mécanique du point, mécanique céleste, calculs en astronomie, ...) est centrale en sciences. Le principe fondamental de la dynamique (loi physique du mouvement) a été énoncé par Newton (1642 - 1727) un peu avant.
On peut voir la méthode d'Euler justement d'un point de vue mécanique, la dérivée ou coefficient directeur de la tangente étant alors à percevoir comme un vecteur vitesse.

Construction grossière On part de $f(0) = 1$ et $f'(0) = f(0) = 1$ et on cherche approximativement $f(1)$.

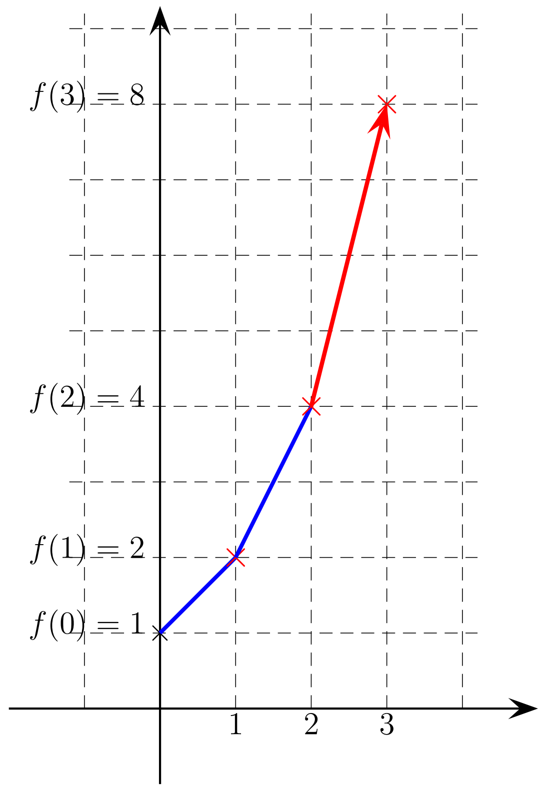


On arrive à la valeur $f(1) = 2$.

On recommence à partir de là avec donc aussi $f'(1) = f(1) = 2$. On part donc du point $(1; 2)$ avec un coefficient directeur de 2.



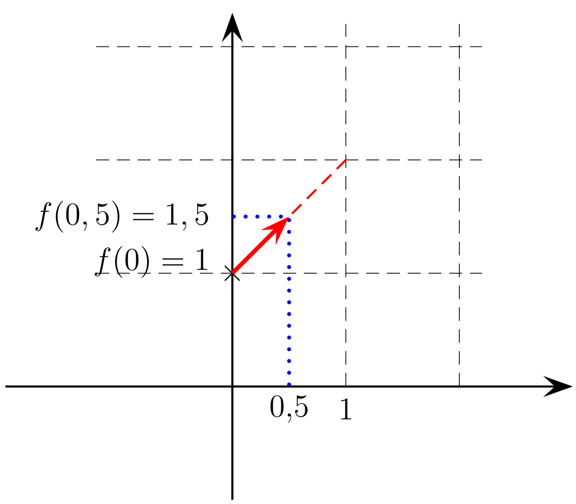
puis on recommence à partir de là avec $f(2) = 4$ et donc $f'(2) = f(2) = 4$:



et ainsi de suite…On trouve ainsi $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 8$, $f(4) = 16$, …

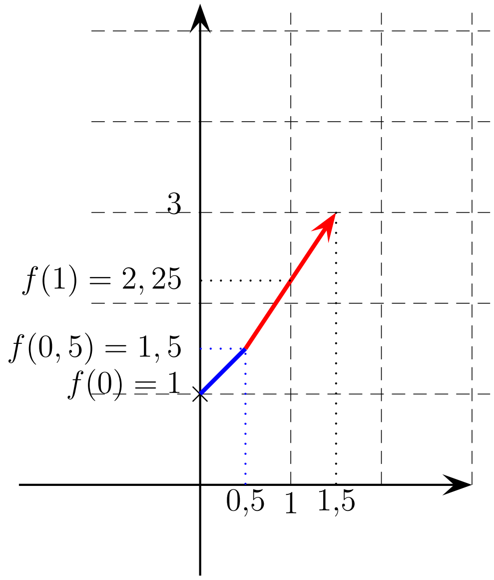
Construction un peu plus fine Pour construire la courbe, on se déplace de 1 en 1 en abscisse, ce qui est assez grossier. On peut procéder de même par pas de 0,5 par exemple.

On part toujours de $f(0) = 1$ et donc $f'(0) = f(0) = 1$.



On arrive à $f(0,5) = 1,5$. On recommence alors à partir de ce point, avec donc $f(0,5) = 1,5$ et

$f'(0,5) = f(0,5) = 1,5$:

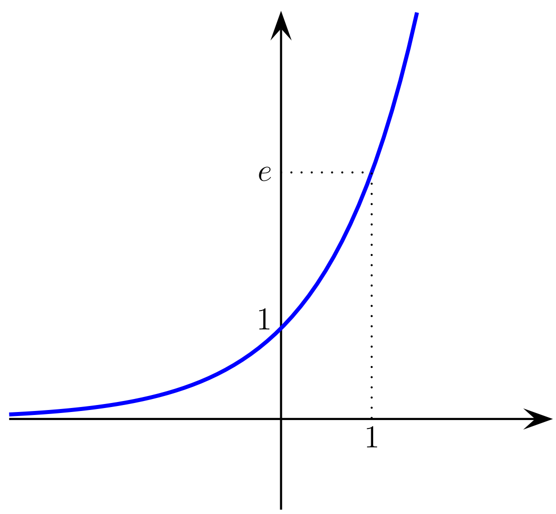


et encore après avec $f'(1) = f(1) = 2,25$, ...

Construction encore plus fine, infiniment plus fine ... On peut encore diminuer le pas, dans la 2ère construction « grossière »il valait $h = 1$, puis dans la 2ème il valait $h = 0,5$.

On peut diminuer à loisir ce pas : $h = 0,1$, puis $h = 0,01$, ...pour obtenir une courbe avec la précision souhaitée.

On aboutit à la courbe, et donc aussi aux valeurs approchées de $\exp(x)$ pour tout réel x :



Ce type de construction, qui se calcule assez évidemment avec des outils numériques, ordinateurs, est le champ mathématique de l'analyse numérique, où on cherche entre autre, à résoudre des problèmes de manière approchée.

V - Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété *Pour tous réels x et y,* $\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$

Démonstration : Soit $y \in \mathbb{R}$ et φ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ car exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et $\varphi = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = \exp(w(x))$, où $w(x) = x+y$, odnc $w'(x) = 1+0 = 1$ et donc, $u'(x) = w'(x)\exp'(w(x)) = \exp(x+y)$, et $v(x) = \exp(x)$, donc $v'(x) = \exp(x)$. On a alors,

$$\varphi'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{[\exp(x)]^2} = 0$$

On en déduit que φ est contante sur $\mathbb{R}$. Or, $\varphi(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$.

Ainsi, pour tout réel x, $\varphi(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y) \iff \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Propriété **Positivité de l'exponentielle**

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \exp\left(\dfrac{x}{2}\right) \times \exp\left(\dfrac{x}{2}\right) = \left[\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0$, et donc, comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$ pour tout x réel.

Propriété **Croissance de l'exponentielle**

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ d'après la propriété précédente. D'où la propriété.

Corollaire *Pour tous réels a et b,*

- $\exp(a) = \exp(b) \iff a = b$
- $\exp(a) < \exp(b) \iff a < b$ *(conservation de l'ordre)*

Propriété **Inverse de l'exponentielle**

Pour tout x réel, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Démonstration : Pour tout réel x, $\exp(x+(-x)) = \exp(0) = 1$, mais par ailleurs aussi,
$\exp(x+(-x)) = \exp(x) \times \exp(-x)$, et donc, $\exp(x)\exp(-x) = 1$, d'ou le résultat.

Propriété *Pour tous réels x et y,* $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(y)}$

Démonstration: Pour tous réels x et y, $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ □

Propriété *Pour tout réel x et tout entier relatif n,* $\exp(nx) = \Big[\exp(x)\Big]^n$

Démonstration: On a, pour un entier n naturel

$$\begin{aligned}\exp(nx) &= exp(x + x + \cdots + x)\\ &= \exp(x)\exp(x)\dots\exp(x)\\ &= [\exp(x)]^n\end{aligned}$$

Pour un entier n négatif, on passe par l'inverse, en écrivant d'abord que $\exp(-nx) = \dfrac{1}{\exp(nx)}$ et on est donc ramené au cas précédent. □

VI - Nombre e et notation puissance

Les propriétés de l'exponentielle démontrées précécemment coïncident avec les règles de calcul sur les puissances.

En fait, pour tout entier n, on peut écrire $\exp(n) = \exp(n \times 1) = \Big[\exp(1)\Big]^n = e^n$, où on a noté $e = \exp(1) \simeq 2,718$.

Cette écriture se généralise :

Définition *On note pour tout x réel,* $\exp(x) = e^x$, *qui se lit "e exponentielle x", ou "e exposant x", ou encore "e puissance x".*

On généralise ici les puissances, définies jusque là comme "multiplications répétées", par exemple $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

Mais que vaut alors, avec cette définition $3^{4,2}$?

Nous avons ici un début de réponse avec le nombre e : $e^{4,2} = \exp(4,2) \simeq 66,69$

Exercice 6 1. Simplifier les expressions : a) $e^5 \times e^3 \times e^{-4}$ b) $\dfrac{e^7}{e^{-2}} \times \dfrac{e^3}{e^{10}}$ c) $(e^x)^5 e^{-2x}$

d) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$ e) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$ f) $\left(e^{x+1}\right)^3 \times e^{-1}$ g) $\dfrac{e^{x+3}}{e^{-x}} \times e^{-x}$ h) $e^{2x}\left(e^{-2x} + e^{-x}\right)$

2. Développer : $A = (e^2 + e^6)(e^{-1} + e)$ $B = (1 + e^x)^2$ $C = (3 - e^x)(3 + e^x)$

3. Factoriser : $A = e^5 - e^3$ $B = e^{x+2} + e^x$ $C = e^{x+3} + e^{x+2} + e^{x+1} + e^x$ $D = e^{2x} - e^{x+1}$ $E = 4 - e^{2x}$

Exercice 7 Démontrer que pour tout réel x, a) $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} = e^x \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-x}}$.

b) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$ c) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ d) $e^{-x} - e^{-2x} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$

On rappelle que, comme la fonction exponentielle est strictement croissante, elle conserve l'ordre, c'est-à-dire que

Corollaire *Pour tous réels a et b,*

- $\exp(a) = \exp(b) \iff a = b$
- $\exp(a) < \exp(b) \iff a < b$ *(conservation de l'ordre)*

Exercice 8 Résoudre les équations et inéquations :

- $(E_1) : e^x = 1$ • $(E_2) : e^{2x} = e$ • $(E_3) : e^x = e^{-x}$ • $(E_4) : e^{x^2} = (e^{-x})^2 e^3$ • $(E_5) : e^{2x+1} = e^{\frac{6}{x}}$
- $(I_1) : e^x > e$ • $(I_2) : e^{2x} \leq 1$ • $(I_3) : (e^x)^3 \leq \dfrac{1}{e}$ • $(I_4) : e^x - \dfrac{1}{e^x} > 0$ • $(I_5) : e^{x^2} \geq e^{-x-1}$

Exercice 9 Donner le tableau de signe de : a) $f(x)=e^x-1$ b) $f(x)=(x^2+x-6)e^{-3x}$
c) $f(x)=2xe^x+3e^x$ d) $f(x)=e^x+e^{-2x}$ e) $f(x)=e^x-e^{-2x}$ f) $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x-1}$

VII - Étude de la fonction exponentielle

On sait que (c'est la définition même !) que $\exp'=\exp$. Plus généralement, on a

Propriété *Pour une fonction u dérivable, on a*

$$(e^u)'=u'e^u$$

Exercice 10 Calculer la dérivée f' des fonctions suivantes : a) $f(x)=e^{3x+1}$ b) $f(x)=e^{x^2+x}$
c) $f(x)=3e^{2x}$ d) $f(x)=xe^x$ e) $f(x)=x^2e^{x^2}$ f) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ g) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x+1}$

Exercice 11 Étudier le sens de variation des fonctions : a) $f(x)=e^{3x}$ b) $f(x)=e^{x^2}$ c) $f(x)=xe^{2x}$
d) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ e) $f(x)=e^x-x$ f) $f(x)=e^{x^2}-x^2$ g) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ h) $f(x)=(2x+3)e^{-2x}$

VIII - Synthèse et exercices

$\mathcal{S}$ynthèse

exp est la seule fonction telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.

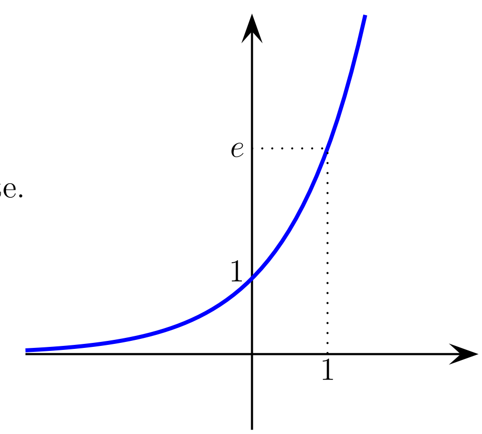
$\exp'=\exp$ et donc, pour toute fonction u dérivable, $(e^u)'=u'e^u$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$; $e^0=1$; $e^1=e\simeq 2,718$

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante.
En particulier, $e^x=e^y \iff x=y$
et $e^x<e^y \iff x<y$

Pour tous réels x et y,

$e^{x+y}=e^xe^y$; $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$; $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$; $(e^x)^y=e^{xy}$



Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x^2+1}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Déterminer les équations des trois tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -1, 0 et 1. Tracer ces trois tangentes dans un repère.

b) Étudier les variations de f et compléter le graphique précédent avec la courbe de f.

Exercice 13 Etudier sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes, et tracer l'allure de la courbe représentative :
a) $f(x)=e^{-x}$ b) $g(x)=e^x+e^{-x}$ c) $h(x)=x+e^x$ d) $k(x)=e^{3x}-3e^x$ e) $l(x)=e^{-x^2}$

Exercice 14 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2e^x$ et $g(x)=(x^2-x-1)\,e^x$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.
2. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3. Dresser les tableaux de variations de f et g.

Exercice 15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

a) Calculer la dérivée f' de f puis la dérivée seconde $f'' = (f')'$.

b) Donner les variations de f'.

c) En déduire les variations de f.

d) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Exercice 16 Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'inétéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capeteur de 1m de longueur.

Cette température est modélisée par : $T(x) = 170 - 150e^{-0,6x}$, où $x \in [0;1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entré dans le capteur, et $T(x)$ est la température en °C.

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. a) Etudier les variations de la température T sur $[0;1]$.
   b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
   c) Tracer dans un repère la courbe représentant la température T.

Exercice 17 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$.

$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. a) Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
   b) Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 18 *(d'après Bac S)* g_1 et g_2 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_1(x) = xe^{-x} \quad \text{et,} \quad g_2(x) = x^2e^{-x}$$

1. Étudier le sens de variation de g_1 et g_2.
2. Dans un repère orthonormal du plan, on note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives de g_1 et g_2.
   a) Préciser la position relative des deux courbes.
   b) Tracer les deux courbes.
3. a) Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse a (a réel).
   b) Cette tangente coupe l'axe des ordonnées en un point N.
   Déterminer en fonction de a, l'ordonnée de N.