Fonction exponentielle - Exercices

Première générale
spécialité maths

Exercice 1 1. Soit n un nombre entier relatif. Simplifier les écritures suivantes :

a) $2^{-3} = \dots$ b) $5^{-3} \times 5^5$ c) $3^2 \times \dfrac{3^8}{3^3}$ d) $(10^6)^2 \times (10^{-3})^5$ e) $2^{2n} \times 2$ f) $2^{3n+1} \times 2^{-n+1}$

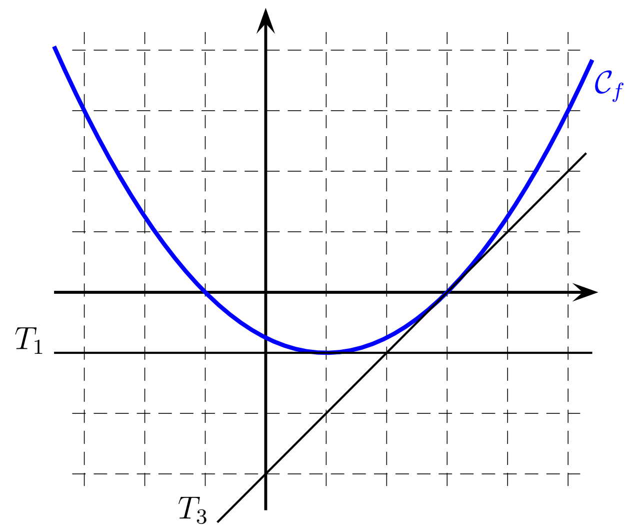
g) $\dfrac{2^{3n+1}}{2^{2n+1}}$ h) $(2^{n+1})^3 \times 2^{-1}$ i) $\dfrac{4^{n+2}}{2^{2n}} \times \frac{1}{8}$ j) $\dfrac{2^{n+3}}{4^{-n}} \times 2^{-n}$ k) $3^{2n}\left(3^{-2n} + 3^{-n}\right)$

2. Factoriser : $A = 2^5 - 2^3$ $B = 2^{n+2} + 2^n$ $C = 2^{n+3} + 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n$ $D = 2^{2n} - 2^{n+1}$

Exercice 2 $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f. T_1 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives 1 et 3.

a) Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f(3)$ puis $f'(1)$ et $f'(3)$.

b) Rappeler l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
Donner les équations de T_1 et T_3.



Exercice 3 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, croissante et telle que $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 3$. Tracer une courbe $\mathcal{C}_f$ vérifiant ces données.

Exercice 4 Étudier les variations des fonctions suivantes, et tracer l'allure de leur courbe représentative :

a) $f(x) = x^3 - 4x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ c) $f(x) = 2x + \dfrac{3}{2x-1}$

Exercice 5 Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de la fonction exponentielle aux points d'abscisse 0 ; 1 et 2.

Exercice 6 1. Simplifier les expressions : a) $e^5 \times e^3 \times e^{-4}$ b) $\dfrac{e^7}{e^{-2}} \times \dfrac{e^3}{e^{10}}$ c) $(e^x)^5 e^{-2x}$

d) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$ e) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$ f) $(e^{x+1})^3 \times e^{-1}$ g) $\dfrac{e^{x+3}}{e^{-x}} \times e^{-x}$ h) $e^{2x}\left(e^{-2x} + e^{-x}\right)$

2. Développer : $A = (e^2 + e^6)(e^{-1} + e)$ $B = (1 + e^x)^2$ $C = (3 - e^x)(3 + e^x)$

3. Factoriser : $A = e^5 - e^3$ $B = e^{x+2} + e^x$ $C = e^{x+3} + e^{x+2} + e^{x+1} + e^x$ $D = e^{2x} - e^{x+1}$ $E = 4 - e^{2x}$

Exercice 7 Démontrer que pour tout réel x, a) $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} = e^x \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-x}}$.

b) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$ c) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ d) $e^{-x} - e^{-2x} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$

Exercice 8 Résoudre les équations et inéquations :

• $(E_1) : e^x = 1$ • $(E_2) : e^{2x} = e$ • $(E_3) : e^x = e^{-x}$ • $(E_4) : e^{x^2} = (e^{-x})^2 e^3$ • $(E_5) : e^{2x+1} = e^{\frac{6}{x}}$

• $(I_1) : e^x > e$ • $(I_2) : e^{2x} \leq 1$ • $(I_3) : (e^x)^3 \leq \dfrac{1}{e}$ • $(I_4) : e^x - \dfrac{1}{e^x} > 0$ • $(I_5) : e^{x^2} \geq e^{-x-1}$

Exercice 9 Donner le tableau de signe de : a) $f(x) = e^x - 1$ b) $f(x) = (x^2 + x - 6)e^{-3x}$
c) $f(x) = 2xe^x + 3e^x$ d) $f(x) = e^x + e^{-2x}$ e) $f(x) = e^x - e^{-2x}$ f) $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x - 1}$

Exercice 10 Calculer la dérivée f' des fonctions suivantes : a) $f(x) = e^{3x+1}$ b) $f(x) = e^{x^2+x}$
c) $f(x) = 3e^{2x}$ d) $f(x) = xe^x$ e) $f(x) = x^2e^{x^2}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ g) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x+1}$

Exercice 11 Étudier le sens de variation des fonctions : a)$f(x) = e^{3x}$ b)$f(x) = e^{x^2}$ c)$f(x) = xe^{2x}$
d)$f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ e)$f(x) = e^x - x$ f)$f(x) = e^{x^2} - x^2$ g)$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ h)$f(x) = (2x+3)e^{-2x}$

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2+1}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Déterminer les équations des trois tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -1, 0 et 1. Tracer ces trois tangentes dans un repère.

b) Étudier les variations de f et compléter le graphique précédent avec la courbe de f.

Exercice 13 Etudier sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes, et tracer l'allure de la courbe représentative :
a) $f(x) = e^{-x}$ b) $g(x) = e^x + e^{-x}$ c) $h(x) = x + e^x$ d) $k(x) = e^{3x} - 3e^x$ e) $l(x) = e^{-x^2}$

Exercice 14 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2e^x$ et $g(x) = (x^2 - x - 1)\, e^x$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.
2. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Dresser les tableaux de variations de f et g.

Exercice 15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

a) Calculer la dérivée f' de f puis la dérivée seconde $f'' = (f')'$.

b) Donner les variations de f'.

c) En déduire les variations de f.

d) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Exercice 16 Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'inétéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capeteur de 1m de longueur.

Cette température est modélisée par : $T(x) = 170 - 150e^{-0,6x}$, où $x \in [0; 1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entré dans le capteur, et $T(x)$ est la température en °C.

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. a) Etudier les variations de la température T sur $[0; 1]$.
   b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
   c) Tracer dans un repère la courbe représentant la température T.

Exercice 17 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$.
$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. a) Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

   b) Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 18 *(d'après Bac S)* g_1 et g_2 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_1(x) = xe^{-x} \quad \text{et,} \quad g_2(x) = x^2e^{-x}$$

1. Étudier le sens de variation de g_1 et g_2.
2. Dans un repère orthonormal du plan, on note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives de g_1 et g_2.

   a) Préciser la position relative des deux courbes.

   b) Tracer les deux courbes.
3. a) Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse a (a réel).

   b) Cette tangente coupe l'axe des ordonnées en un point N.
   Déterminer en fonction de a, l'ordonnée de N.

$\mathcal{S}$ynthèse

exp est la seule fonction telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

$\exp' = \exp$ et donc, pour toute fonction u dérivable, $(e^u)' = u'e^u$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$; $e^0 = 1$; $e^1 = e \simeq 2,718$

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante.
En particulier, $e^x = e^y \iff x = y$
et $e^x < e^y \iff x < y$

Pour tous réels x et y,

$e^{x+y} = e^x e^y$; $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$; $(e^x)^y = e^{xy}$