Dérivation des fonctions

Spécialité mathématiques
Première générale

Fonctions dérivée, tangentes et variations des fonctions

Table des matières

I - Échauffements - Rappels

Exercice 1

a) Rappeler la définition de la courbe représentative de la fonction f. Illustrer graphiquement.

b) Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - x - 3$.

   a) Indiquer les points qui appartiennent à $\mathcal{C}_f$: $A(2;5)$, $B(-2;-13)$, $C(5;42)$ et $D(-5;52)$

   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées, puis avec l'axe des abscisses.

Exercice 2

a) Tracer dans un repère les droites d'équations $y = 2x - 1$ et $y = -x + 2$.
Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

b) Une droite passe par les points $A(2;1)$ et $B(4;3)$. Tracer cette droite et lire graphiquement son coefficient directeur.
Déterminer ce coefficient directeur par le calcul.

c) Reprendre la question précédente avec la droite qui passe par les points $C(-1;2)$ et $D(3;-1)$.

d) Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par les points $E(0;12)$ et $F(3;3)$.
Quelles sont les coordonnées de son point d'intersection avec l'axe des abscisses ?

e) La droite d qui passe par $G(2;3)$ et $H(12;11)$ et la droite d' qui passe par $I(-2;-5)$ et $J(3;-1)$ sont-elles parallèles ?

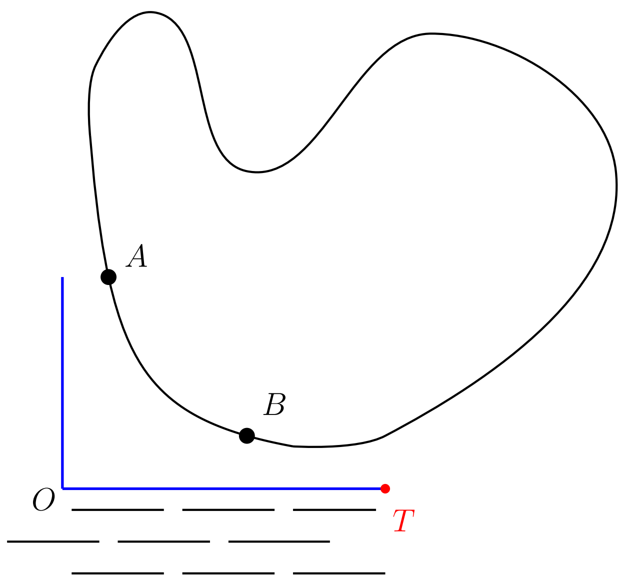
Exercice 3 **Sortie de route**

La courbe suivnate est celle d'un circuit automobile sur lequel les véhicules circulent dans le sens horaire inverse (ou sens trigonométrique). Au sud du circuit se trouve une tribune pour les spectateurs.
Lorsqu'un pilote perd le contrôle de son véhicule, sa trajectoire devient alors rectiligne (et uniforme, cf. physique...).

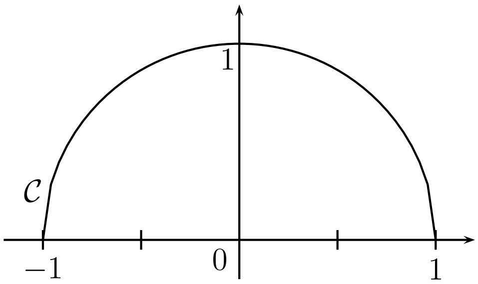
a) Un pilote perd le contrôle en A. Dessiner sa trajectoire ensuite.

b) Le point extrême de la tribune est le point T.
Un autre pilote perd le contrôle en B. Dessiner sa trajectoire : percute-t-il la tribune ?

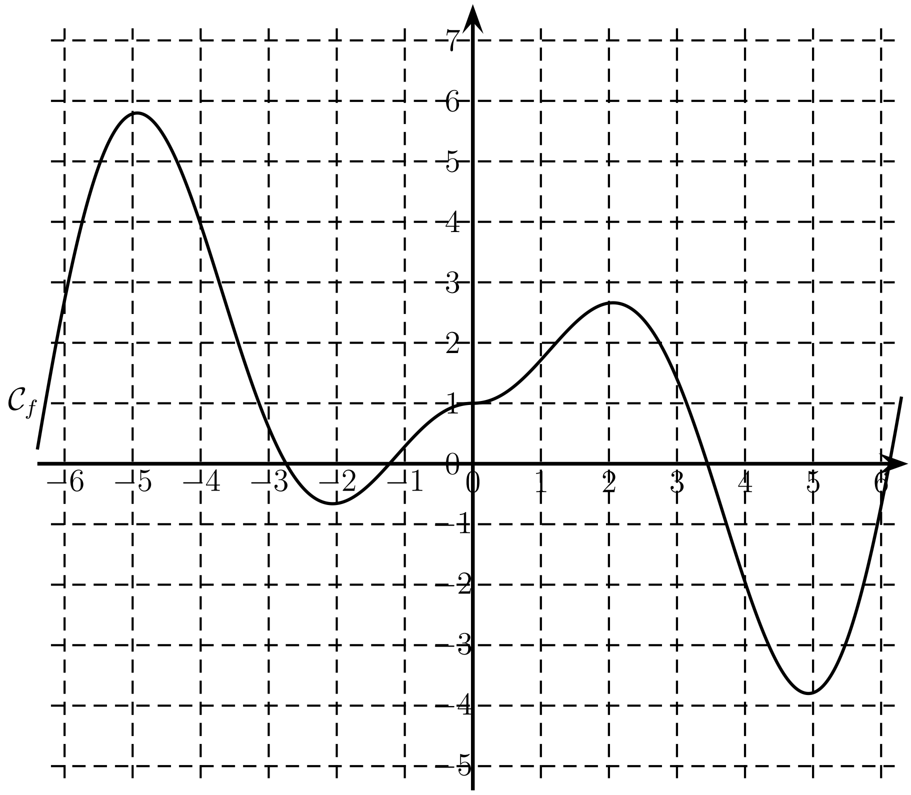
c) Entre A et B la courbe du circuit est la courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Le point B a pour abscisse 2 tandis T a pour abscisse $3,5$, (OT) étant l'axe des abscisses.
La tribune sera-t-elle épargnée par le véhicule qui a perdu le contrôle en B.
Nous répondrons à cette question, exactement, plus tard...
Pour l'instant, on note C le point sur le circuit entre A et B et d'abscisse 1.
La droite (CB) passe-t-elle par la tribune au sud ?



Exercice 4 On considère le demi-cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1.
Tracer les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisse $-0,5$, 0, $0,5$ et 1.



Exercice 5 La courbe $\mathcal{C}_f$, représentative d'une fonction f, est donnée ci-dessous. Construire les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses -5 ; -4 ; 0 ; 2, 4 et 5.



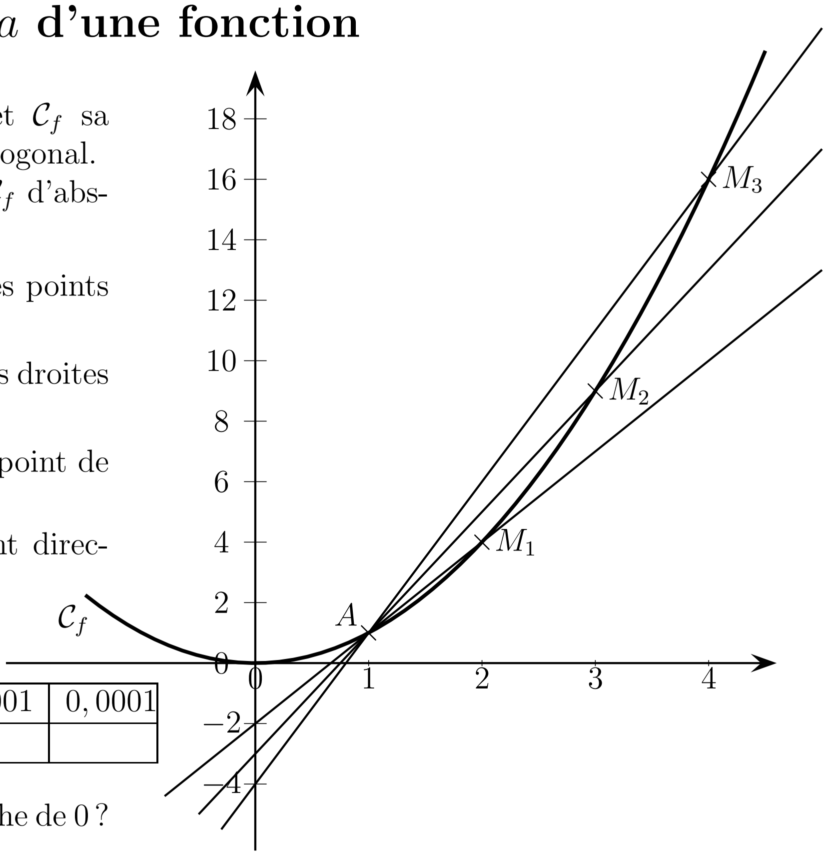
II - Nombre dérivé en a d'une fonction

Exercice 6 Soit f la fonction carré et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On note A, M_1, M_2 et M_3 les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1, 2, 3 et 4.

1. Tracer sur une figure $\mathcal{C}_f$ et placer les points A, M_1, M_2, M_3.
2. Calculer les coefficients directeurs des droites (AM_3), (AM_2) et (AM_1).
3. Soit un nombre réel $h > 0$, et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $1 + h$.
   Donner une expression du coefficient directeur m_h de la droite (AM).
4. Compléter le tableau :

h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
m_h						

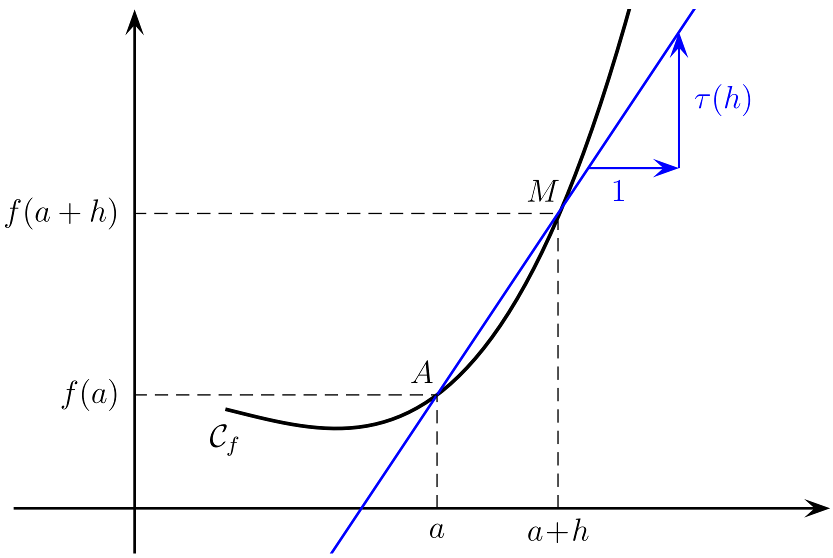
5. Que se passe-t-il lorsque h se rapproche de 0 ?



Définition *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
• *Pour tout nombre réel $a \in I$ non nul et tel que $(a+h) \in I$, on appelle taux d'accroissement, ou taux de variation, de la fonction f en a, le nombre*

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

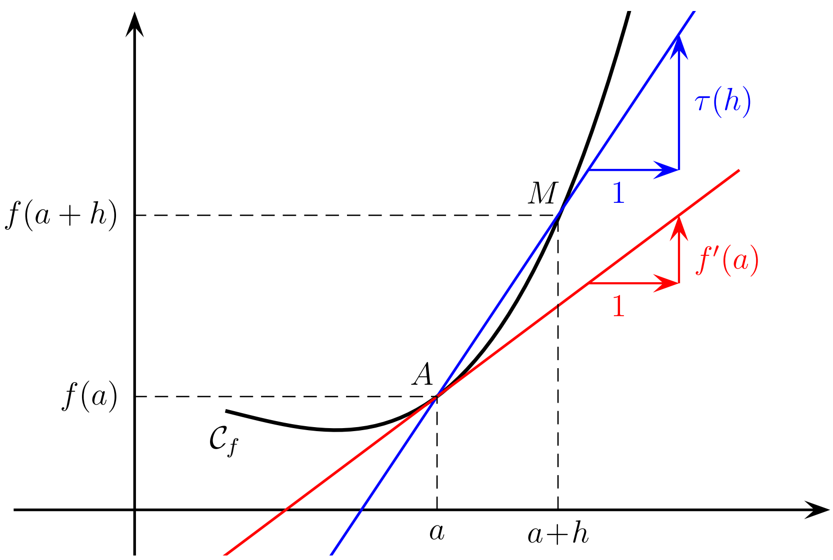
Ce taux est le coefficient directeur de la sécante à la courbe entre les points A et M de la courbe d'abscisses a et $a+h$.



• *On dit que la fonction f est* **dérivable** *en a, lorsque le taux d'accroissement $\tau(h)$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.*
Ce nombre L, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a, et est noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$

• *Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.*



Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$.

1. Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse $a = 1$.
   Déterminer alors graphiquement $f'(1)$.

2. a) Pour $h > 0$, on pose $\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Compléter le tableau :

h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$\tau(h)$						

Vers quoi semble tendre le nombre $\tau(h)$ lorsque le nombre h tend vers 0 ?

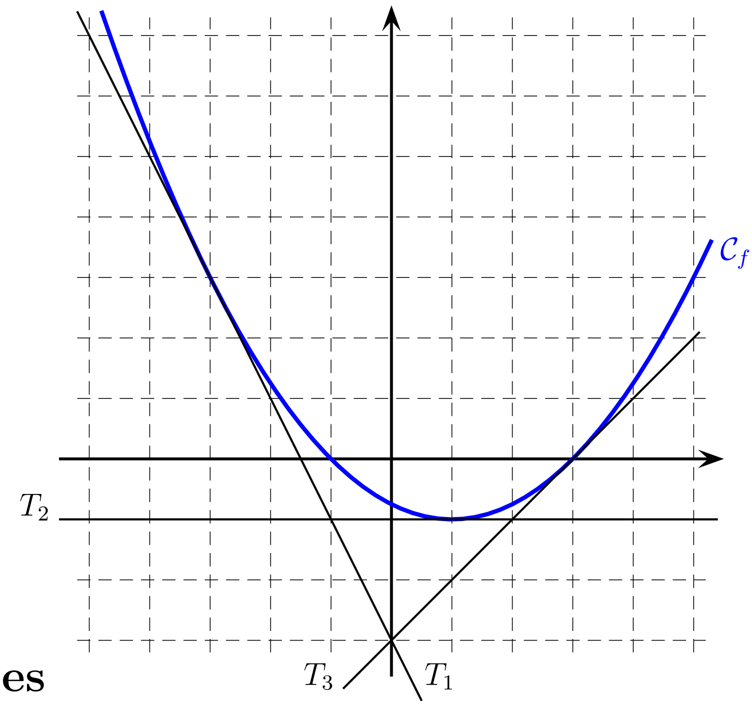
b) Démontrer ce résultat algébriquement à partir de l'expression de $\tau(h)$ et de celle de f.

Exercice 8 Dans chaque cas, montrer que f est dérivable au point a indiqué, et donner $f'(a)$.

- $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ en $a = 1$
- $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en $a = 2$
- $f(x) = x^2 - 2x$ en $a = 2$
- $f(x) = x^2 - 2x$ en $a \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^3 - 3x$ en $a = 2$
- $f(x) = x^3 - 3x$ en $a \in \mathbb{R}$

Exercice 9 $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.
T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

Déterminer graphiquement $f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$, puis les équations de T_1, T_2 et T_3.



III - Fonctions dérivées

1) Fonction dérivée

Définition *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

- *On dit que f est dérivable sur I si f admet un nombre dérivé en tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.*
- *On appelle* **fonction dérivée** *de f la fonction notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.*

2) Dérivées des fonctions usuelles

Propriété *Toute fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = m$.

Démonstration: Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$,

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(m(a+h)+p) - (ma+p)}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

Ainsi, pour tout réel a, $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = f'(a) = m$.

La fonction dérivée de f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = m$. □

Exemple : Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 12$, alors pour tout réel x, $f'(x) = -3$.

Propriété *La fonction carré, définie par $f(x) = x^2$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

Démonstration: Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$,

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

Ainsi, pour tout réel a, $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = f'(a) = 2a$.

La fonction dérivée de f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$. □

Propriété *Pour tout entier naturel non nul n, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration: Un peu plus tard dans le cours... □

Exemple : $f(x) = x^{127}$ alors $f'(x) = 127x^{126}$
$f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

Propriété *La fonction inverse f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.*
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Démonstration: Pour tous $a \in \mathbb{R}^*$ et $h \neq 0$,

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \frac{\dfrac{a}{a(a+h)} - \dfrac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-\dfrac{h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

Ainsi, pour tout réel a, $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

La fonction dérivée de f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. □

Propriété *La fonction racine carrée, définie sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.*
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration: Pour tous $a > 0$ et h tel que $a + h > 0$,

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\
&= \frac{\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \frac{(a+h) - a}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $a > 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

La fonction dérivée de f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. □

3) Opérations sur les dérivées

Propriété *Soit u une fonction dérivable sur I et $k \in \mathbb{R}$, alors la fonction $f = ku$ est dérivable sur I, avec, $f' = ku'$.*

Démonstration: Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $(a+h) \in I$,

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{ku(a+h)-ku(a)}{h} = k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

Or, comme u est dérivable en a, on a $\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$, et donc $\lim_{h\to 0} \tau(h) = f'(a) = ku'(a)$. $\square$

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.
Alors, $f = 3u$, où u est la fonction carré, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec, $f' = 3u'$, soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$.

Propriété *Soit u et v deux fonctions dérivables sur I, alors la somme $u+v$ est dérivable sur I avec $(u+v)' = u' + v'$.*

Démonstration: Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $(a+h) \in I$,

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-(u(a)+v(a))}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}\end{aligned}$$

Or, comme u et v sont dérivables en a, $\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$, et $\lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.
Ainsi, $\lim_{h\to 0} \tau(h) = u'(a) + v'(a)$. $\square$

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.
Alors $f = u + v$, où $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$ sont dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

Propriété *Soit u et v deux fonctions dérivables sur I, alors la fonction produit uv est dérivable sur I, avec $(uv)' = u'v + uv'$.*

Démonstration: Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $(a+h) \in I$,

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{\Big(u(a+h)-u(a)\Big)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h) + \frac{u(a)\Big(v(a+h)-v(a)\Big)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h) + u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\end{aligned}$$

Or, comme u et v sont dérivables en a, $\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$, et $\lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$,
et on a donc $\lim_{h\to 0} \tau(h) = u'a)v(a) + u(a)v'(a)$. $\square$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)(-x+3)$.
Calculer de deux manières différentes f'.

Propriété *Pour tout entier naturel non nul n, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = nx^{n-1}$.

<u>Démonstration:</u> On cherche à démontrer que la propriété est vraie pour **tous les entiers naturels** n.
On sait déjà que cette propriété est vraie pour

- $n = 1$: $f(x) = x^1 = x$ a pour dérivée $f'(x) = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$.
- $n = 2$: $f(x) = x^2$ a pour dérivée $f'(x) = 2x = 2x^1 = 2x^{2-1}$.

Pour $n = 3$, on peut écrire $f(x) = x^3$ comme un produit $f(x) = x^3 = x \times x^2$, et on a alors $f'(x) = 1 \times x^2 + x \times (2x) = 3x^2 = 3x^{3-1}$ et la formule est encore vraie.
De même, pour $n = 4$, $f(x) = x^4 = x \times x^3$, et donc, $f'(x) = 1 \times x^3 + x \times (3x^2) = 4x^3 = 4x^{4-1}$.

On cherche à généraliser et montrer que cette formule est vraie pour tous les entiers non nuls. Supposons que cette formule soit vraie pour un certain entier naturel non nul n, c'est-à-dire que la dérivée de $f(x) = x^n$ soit $f'(x) = nx^{n-1}$.

Alors pour l'entier suivant $(n+1)$, $f(x) = x^{n+1} = x \times x^n$ a pour dérivée $f'(x) = 1 \times x^n + x \times (nx^{n-1}) = x^n + nx^n = (n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}$.

Ainsi, si la formule est vraie pour un certain entier n, elle est encore vraie pour l'entier suivant $(n+1)$.

Or, on a vu que cette formule est vraie pour l'entier $n = 1$, elle est donc encore vraie pour l'entier suivant $n = 2$, et donc aussi pour l'entier suivant $n = 3$, puis aussi pour $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, ...

Finalement cette formule est vraie pour tous les entiers naturels à partir de 1.

Cette démonstration s'appelle une démonstration par **récurrence**. □

Propriété *Soit une fonction u dérivable sur I telle que $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.*
Alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I avec $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

<u>Démonstration:</u> Pour tout $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $(a+h) \in I$,

$$\tau(h) = \frac{\dfrac{1}{u(a+h)} - \dfrac{1}{u(a)}}{h} = \frac{\dfrac{u(a) - u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h} = \frac{u(a) - u(a+h)}{h} \times \frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

Or, comme u est dérivable en a, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$, et donc, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \tau(h) = -u'(a) \times \frac{1}{(u(a))^2}$. □

<u>Exemple :</u> Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

Propriété *Soit $u$et v deux fonctions dérivables sur I, tel que pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.*
Alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, avec $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

<u>Démonstration:</u> On peut écrire $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$, et on a donc, en utilisant la dérivée d'un produit, et la dérivée de l'inverse d'une fonction :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

□

<u>Exemple :</u> Calculer la dérivée de f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

4) Tableaux des formules dérivées

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	**Dérivée**	f est définie sur	f est dérivable sur
$f(x)=k$ (constante)	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=x^n \quad (n\in\mathbb{N})$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+=[0;+\infty[$	$\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$

Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	**Dérivée**
$ku,\ k\in\mathbb{R}$	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exercice 10 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x)=3$ b) $f(x)=3x$ c) $f(x)=\dfrac{5}{2}x$ d) $f(x)=x^2$

e) $f(x)=x^7$ f) $f(x)=2x^3$ g) $f(x)=3x+2$ h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

i) $f(x)=-x^2+x-\dfrac{7}{2}$ j) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ k) $f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{x+1}$ l) $f(x)=\dfrac{4}{x}$

m) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ n) $f(x)=2x^5+\sqrt{x}$ o) $f(x)=(3x+2)x^2$ p) $f(x)=(-2x+1)(x+1)$

IV - Équation de la tangente

Théorème *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et $\alpha\in I$.*
Alors, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse α est :

$$y=f'(\alpha)\,(x-\alpha)+f(\alpha)\ .$$

Démonstration: Comme f est dérivable en α, la tangente à $\mathcal{C}_f$ a une équation réduite de la forme $y=f'(\alpha)x+p$. De plus, cette tangente passe par le point $A\,(\alpha;f\,(\alpha))$ et donc, $f(\alpha)=f'(\alpha)\alpha+p \iff p=f(\alpha)-f'(\alpha)\alpha$.

Ainsi la tangente a pour équation : $y=f'(\alpha)x+f(\alpha)-f'(\alpha)\alpha=f'(\alpha)\,(x-\alpha)+f(\alpha)$. □

Exercice 11 Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point a donné :

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ et $a = -2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2}(-3 + x + x^2)$ et $a = 4$ c) $f(x) = (2x+1)^2$ et $a = 0$

Exercice 12 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x$, et $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative.

1. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 3.
2. a) Etudier le signe de $f(x) - (-8x + 18)$.
   b) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Exercice 13

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
   Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) = af'(a)$.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
   Quels sont les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente passe par l'origine.

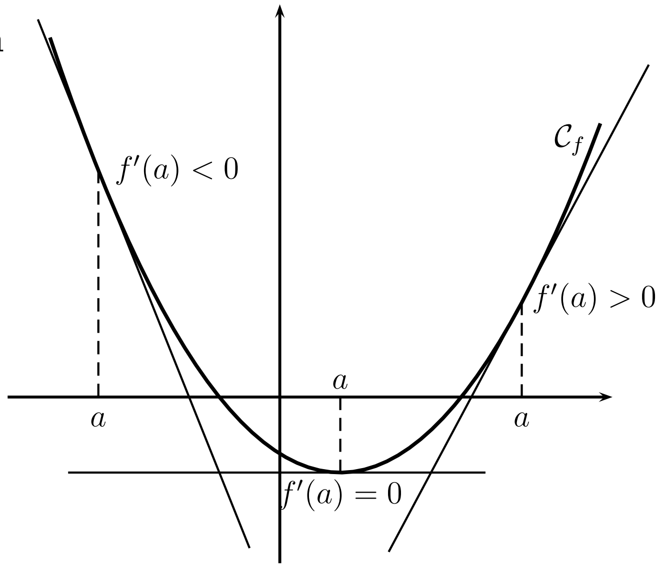
Exercice 14 Répondre à la question c) de l'exercice 1 : la tribune sera-t-elle évitée ?

V - Applications de la dérivation

1) Sens de variation d'une fonction

On a vu que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a ; ainsi

- si $f'(a) > 0$, la tangente est une droite strictement croissante, et il en est de même de f "au voisinage" de a
- si $f'(a) < 0$, la tangente est une droite strictement décroissante, et il en est de même de f "au voisinage" de a



Théorème *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

Exercice 15 Dresser le tableau de variation des fonctions de l'exercice 5 et des fonctions suivantes :

q) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ r) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ s) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ t) $f(x) = \dfrac{3}{x+3} - \dfrac{2}{x+2}$

Exercice 16 f est la fonction définie par l'expression $f(x) = \dfrac{1}{-2x^2 + 4x - 3}$.

1. On définie la fonction g sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = -2x^2 + 4x - 3$. Étudier les variations de g.
2. En déduire les variations de f puis le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

2) Extrema d'une fonction

Définition *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

- *Un* **extremum** *est un minimum ou un maximum.*
- *f présente un* **maximum local** *$m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.*
- *f présente un* **minimum local** *$m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.*
- *L'extremum est dit* **global** *lorsque $J = I$.*

Théorème *Si $f(x_0)$ est un extremum local sur l'intervalle $]a;b[$, alors $f'(x_0) = 0$.*
La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet une tangente horizontale au point $(x_0\ ;\ f(x_0))$.

Remarque : Ce théorème dit que : $f(x_0)$ extremum local $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$.
La réciproque : $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x_0)$ extremum local est FAUSSE.

Par exemple, soit $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Ainsi, $f'(0) = 0$. Néanmoins $f(0)$ n'est ni un minimum ni un maximum local de f car pour $x < 0$, $f(x) = x^3 < 0 = f(0)$ et pour $x > 0$, $f(x) = x^3 > 0 = f(0)$.

Exercice 17 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{4x^2 + 1}$.

1. A l'aide de la calculatrice tracer $\mathcal{C}_f$ et localiser le maximum de f.
2. Vérifier par le calcul s'il s'agit bien d'un maximum de f.

Exercice 18 Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.
Rechercher les éventuels extrema locaux et globaux de f.

Exercice 19 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Déterminer les coordonnés de l'extremum de f. Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 20 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :

x	-6	-2	1	4
f'			4	
		↗ 0 ↗		↘
	-1			3

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 21 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :

x	-4	-1	1	2	4
f'		0			3
	↗		↘	↗ 0 ↗	
	-7		-1		

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 22 La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v}\ .$$

À quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

3) Résolution d'équations

Théorème des valeurs intermédiaires
Soit k un nombre réel, f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ telle que

- *f est dérivable sur $[a;b]$*
- *f est strictement monotone sur $[a;b]$*
- *$f(a) < k < f(b)$ ou $f(a) > k > f(b)$*

alors, il existe un unique $\alpha \in]a;b[$ tel que $f(\alpha) = k$.

Exercice 23 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2;5]$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		4		5
			4				10
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	1				-3		

Déterminer le nombre de solutions, et l'intervalle où elles se situent, de l'équation
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = -5$

Exercice 24 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3;2]$.
Déterminer un encadrement plus précis de cette solution.

Exercice 25 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions, respectivement dans les intervalles $]-2;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;2[$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande de ces solutions.

VI - Exercices

Exercice 26 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 6x + 2$.
Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f est toujours au dessus de n'importe laquelle de ses tangentes.

Exercice 27 *On dit que deux paraboles sont tangentes entre elles lorsqu'elles ont un point commun A et une tangente commune en A.*
À tout nombre $m \neq 0$, on associe la parabole $\mathcal{P}_m$ d'équation $y = mx^2 + (1-2m)x + m$.
Montrer que toutes ces paraboles sont tangentes entre elles.

VII - Dérivée d'une fonction composée

Propriété *(Admise)*
Soit u et v deux fonctions dérivables $\mathbb{R}$, et $f = u \circ v$, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u(v(x))$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, $f' = v' \times u' \circ v$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$.

<u>Exemple :</u> Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Alors $f = u \circ v$, avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + 1$.
On a alors $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = 2x\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.