Fonctions trigonométriques
Compléments sur les fonctions

Spécialité mathématiques
Première générale

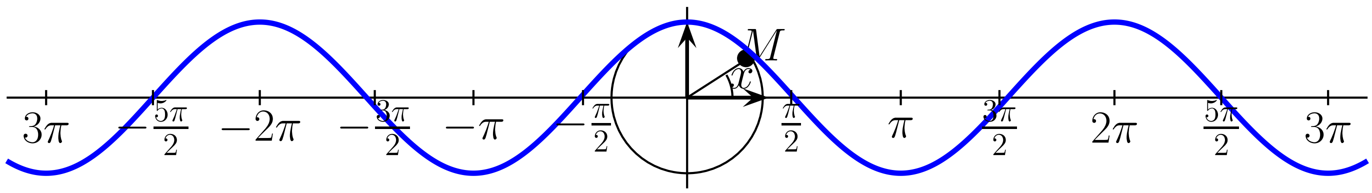
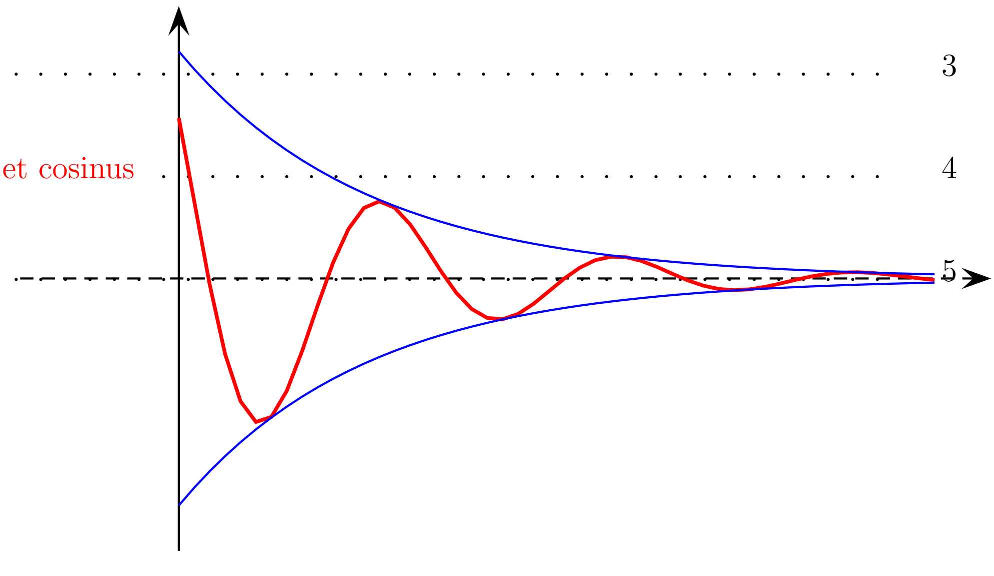
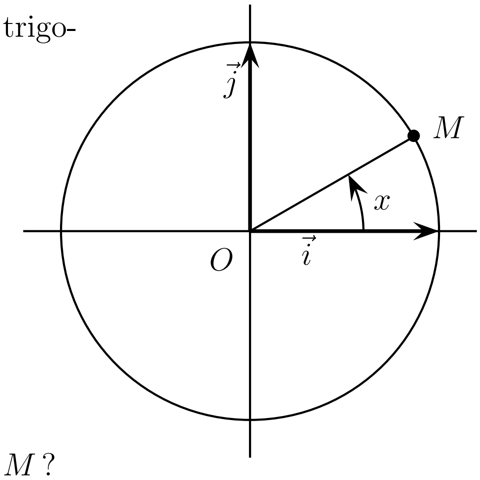


Table des matières



I - Échauffements - Rappels

Exercice 1 Soit x un nombre réel quelconque et M le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = x$.



a) Compléter le tableau et situer les angles sur le cercle :

x (deg)	0	45	60	90	135	180	270	360
x (rad)								

b) Rappeler quelles sont les coordonnées de M en fonction de x.
À quel intervalle peut appartenir x ? l'abscisse de M ? l'ordonnée de M ?

c) Rappeler les valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$						
$\cos(x)$						

d) Compléter les tableaux de signe :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$					

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$					

e) Compléter les tableaux de variation :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$					

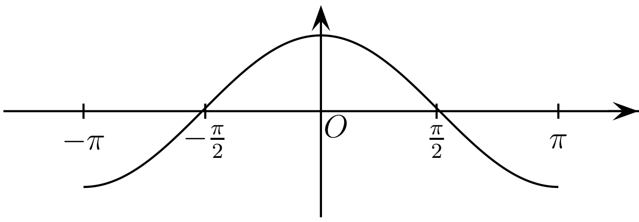
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$					

II - Fonctions cosinus et sinus

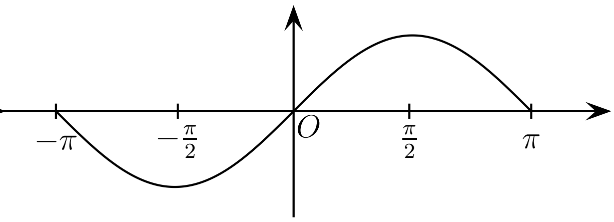
Définition *La fonction cosinus est la fonction qui à tout réel x associe le nombre* $\cos(x)$.
La fonction sinus est la fonction qui à tout réel x associe le nombre $\sin(x)$.

Comme vu dans l'exercice 1, on a pour $x \in [-\pi; \pi]$, les courbes

Fonction cosinus



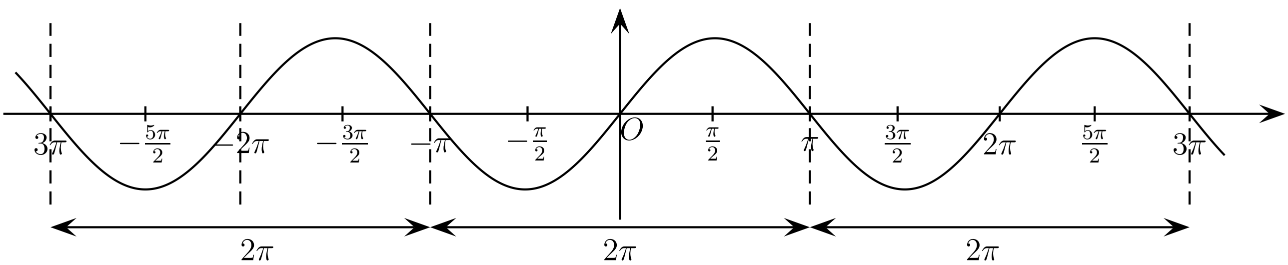
Fonction sinus



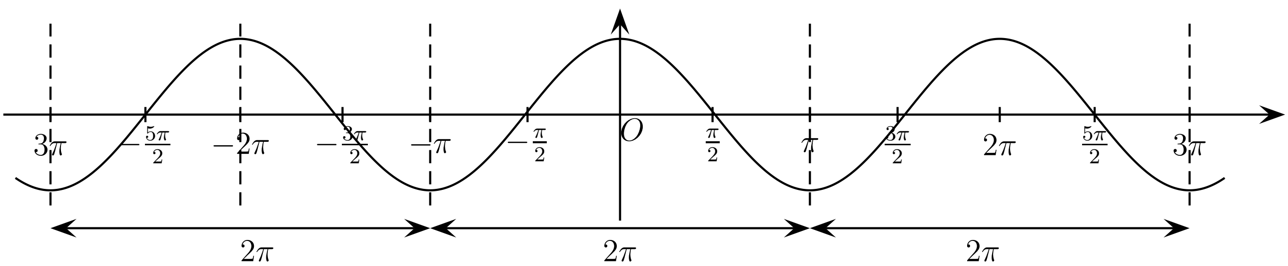
Propriété *Pour tout réel x,* $\cos(x+2\pi) = \cos x$ *et* $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
Les fonctions $x \mapsto \cos x$ *et* $x \mapsto \sin x$ *sont* **périodiques** *de période* 2π.
Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus (sinusoïdes) sont inchangées par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

<u>Remarque :</u> On a vu que $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ et ainsi les courbes des sinus et cosinus sont simplement "décalées" de $\frac{\pi}{2}$, ou plus exactement translatées de $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.
Les deux courbes s'appellent des sinosoïdes.

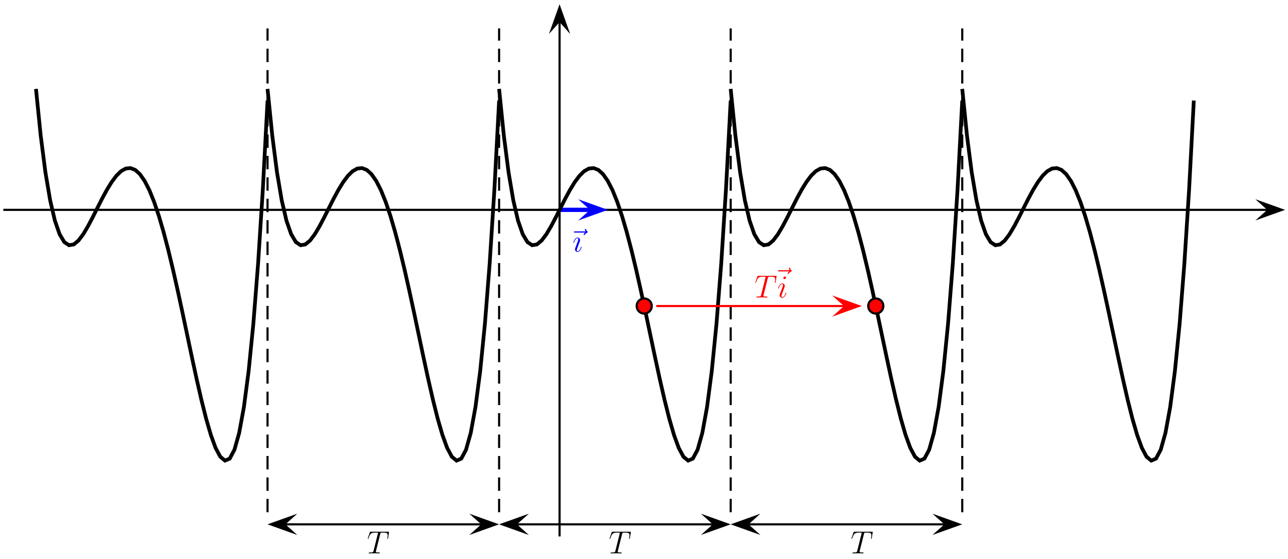
Courbe de la fonction sinus :



Courbe de la fonction cosinus :

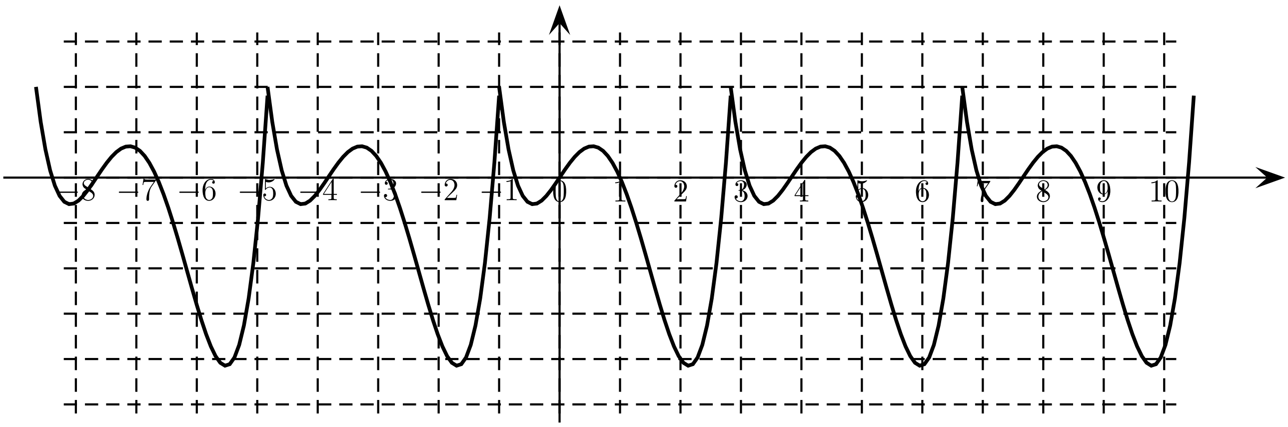


Définition *Une fonction f est* ***périodique*** *de periode T lorsque pour tout réel x on a* $f(x+T) = f(x)$.
Il suffit alors d'étudier / tracer la courbe de f sur un intervalle de longueur T puis de compléter la courbe par transalation de vecteur $T\vec{i}$.



Remarque : La fréquence du signal est alors $f = \dfrac{1}{T}$ et la pulsation $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

Exercice 2 Déterminer graphiquement la période de la fonction suivante :



Exercice 3 Soit f la fonction périodique de période 1 définie par $f(t) = -2t + 1$ si $t \in [0; 1]$.
Tracer la représentation graphique de f sur $[-2; 4]$.

Exercice 4 Soit f la fonction périodique de période 2 définie par $f(t) = t^2$ si $t \in [-1; 1]$.
Tracer la représentation graphique de f sur $[-3; 5]$.

Exercice 5 Soit f la fonction périodique, de période 2, définie par $f(t) = -2t^2 + 2$ si $t \in [-1; 1]$.
Dresser le tableau de variations de f sur $[-1; 1]$.
Tracer alors la représentation graphique de f sur $[-3; 5]$.

III - Étude des fonctions sinus et cosinus

Propriété *Les fonctions cosinus et sinus sont définies et dérivables sur* $\mathbb{R}$, *avec les dérivées*

$$\cos' = -\sin \qquad \textit{et } \sin' = \cos$$

On retrouve alors les sens de variation :

Pour la fonction sinus :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)=\cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)=\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour la fonction cosinus :

x	$-\pi$		0		π
$\sin x$	0	$-$	0	$+$	0
$f'(x)=-\sin x$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)=\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Exercice 6 Préciser les équations des deux tangentes en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$ pour la courbe représentative de la fonction sinus.
Faire de même pour la courbe de la fonction cosinus.
Représenter alors graphiquement les deux sinusoïdes et leurs tangentes.

IV - Composition de fonctions

Définition *Etant donné deux fonctions f et g, on définit la fonction f composée de u et v, notée $f=u\circ v$ (u "rond" v) par :*

$$f(x)=(u\circ v)(x)=u(v(x))$$

Exemple : Soit $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=x-2$. Alors, pour tout $x\geqslant 2$,

$$(u\circ v)(x)=u(v(x))=u(x-2)=\sqrt{x-2}$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] & \sqrt{X} \\ x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "u\circ v"'] & x-2 \arrow[r, "u"] & \sqrt{x-2} \end{tikzcd}$$

$$(v\circ u)(x)=v(u(x))=v(\sqrt{x})=\sqrt{x}-2$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] & X-2 \\ x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "v\circ u"'] & \sqrt{x} \arrow[r, "v"] & \sqrt{x}-2 \end{tikzcd}$$

Attention, en général, $u\circ v\neq v\circ u$! L'opération "composition" n'est pas commutative.

Exercice 7 Pour $h_1 : x\mapsto\sqrt{x-1}$ et $h_2 : x\mapsto x^2+1$, donner l'expression en fonction de x des fonctions suivantes :

$$f_1=h_2\circ h_1 \quad ; \quad f_2=h_1\circ h_2 \quad ; \quad f_3=h_1\circ h_1 \quad ; \quad f_4=h_2\circ h_2$$

Exercice 8 Pour $h_1 : x\mapsto\cos(x)$ et $h_2 : x\mapsto x^2+1$, donner l'expression en fonction de x des fonctions suivantes :

$$f_1=h_2\circ h_1 \quad ; \quad f_2=h_1\circ h_2 \quad ; \quad f_3=h_2\circ h_1\circ h2$$

Exercice 9 Les fonctions u, v et w sont définies par les expressions

$$u(x) = x + 3\,,\quad v(x) = \frac{1}{x}\quad \text{et}\quad w(x) = 2 - 7x\,.$$

1. Soit $f = w \circ v \circ u$. Démontrer que f est définie par l'expression $f : x \mapsto 2 - \dfrac{7}{x+3}$.
2. Étudier le sens de variation de f sur $[-2, 4]$.
3. Encadrer $f(x)$ au mieux sur $[-2, 4]$.

Propriété *En tout point x où la fonction $f = u \circ v$ est dérivable, on a*

$$f'(x) = (u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$$

Exemples :

— $f(x) = e^{3x+1}$ alors $f = u \circ v$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 3x + 1$, donc $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 3$
d'où $f'(x) = v'(x)u'(v(x)) = 3e^{3x+1}$

— $f(x) = \sin(3x + 1)$ alors $f = u \circ v$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = 3x + 1$, donc $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = 3$
d'où $f'(x) = v'(x)\,u'(v(x)) = 3\cos(3x + 1)$

— $f(x) = (3x + 1)^2$ alors $f = u \circ v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3x + 1$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3$
d'où $f'(x) = v'(x)\,u'(v(x)) = 3 \times 2(3x + 1) = 6(3x + 1)$

— $f(x) = (3x + 1)^9$ alors $f = u \circ v$ avec $u(x) = x^9$ et $v(x) = 3x + 1$, donc $u'(x) = 9x^8$ et $v'(x) = 3$
d'où $f'(x) = v'(x)\,u'(v(x)) = 3 \times 9(3x + 1)^8 = 27(3x + 1)^8$

En pratique, pour obtenir la dérivée d'une fonction composée $u(v(x))$ on n'oublie pas de multiplier par la dérivée de la fonction « à l'intérieur » :

Corollaire

Fonction usuelle	**Dérivée**
e^x	e^x
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
x^2	$2x$
x^n, $n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Fonction composée	**Dérivée**
e^u	$u'e^u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
u^2	$2u'u$
u^n, $n \in \mathbb{Z}$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exercice 10 Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$f_1(x) = (6x + 3)^3$ $\quad f_2(x) = (-2x^2 + 3)^5$ $\quad f_3(x) = e^{6x^2+1}$ $\quad f_4(x) = xe^{-x^2}$ $\quad f_5(x) = e^{\sin(x)}$

$f_6(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ $\quad f_7(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$ $\quad f_8(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ $\quad f_9(x) = \sin(x^2 + 1)$ $\quad f_{10}(x) = \cos(3x^2 + x)$

$f_{11}(x) = \sin(2\pi x)$ $\quad f_{12}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad f_{13}(x) = x(2x - 1)^3$ $\quad f_{14}(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ $\quad f_{15}(x) = e^{\cos\left(3x^2\right)}$

Exercice 11 Étudier le sens de variation, puis tracer l'allure de la courbe, des fonctions suivantes :

$f_1(x) = (6x+3)^3 \quad f_2(x) = e^{6x^2+1} \quad f_3(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad f_4(x) = \dfrac{3}{x^2+1} \quad f_5(x) = \sqrt{3x^2+1}$

Exercice 12 On note C la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ définie sur $[0;2]$, dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Pour $M(x;y)$ un point de la courbe C, on note aussi $N(x;0)$ et $M(0;y)$ les points et enfin $A(x)$ l'aire du rectangle $ONMP$.

Déterminer la position du point M sur la courbe C pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale.

Exercice 13 On donne la formule $\cos(x)+\sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

On note $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = -f(x)$ et $h(x) = e^{-x}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

a) Dresser le tableau de variation de f et tracer dans un repère sa courbe.
Tracer dans ce même repère la courbe de la fonction g.

b) Étudier le sens de variation de la fonction h sur $[0;2\pi]$.

c) Tracer sur le graphique précécent l'allure de la courbe de h.