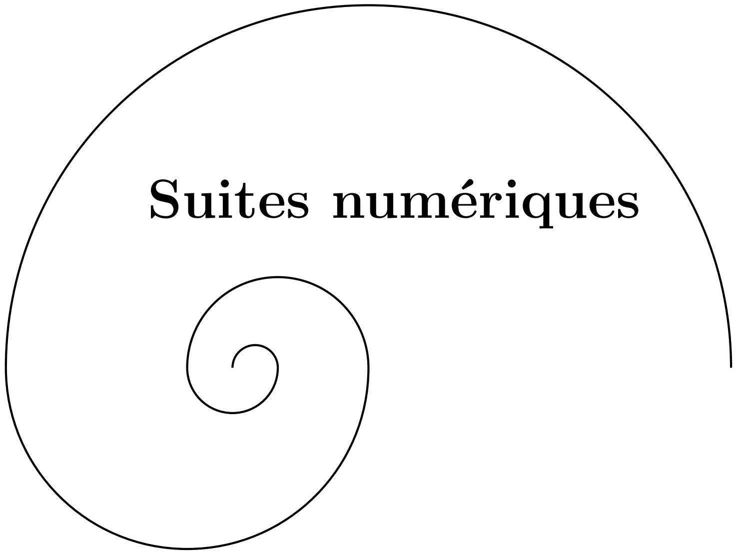
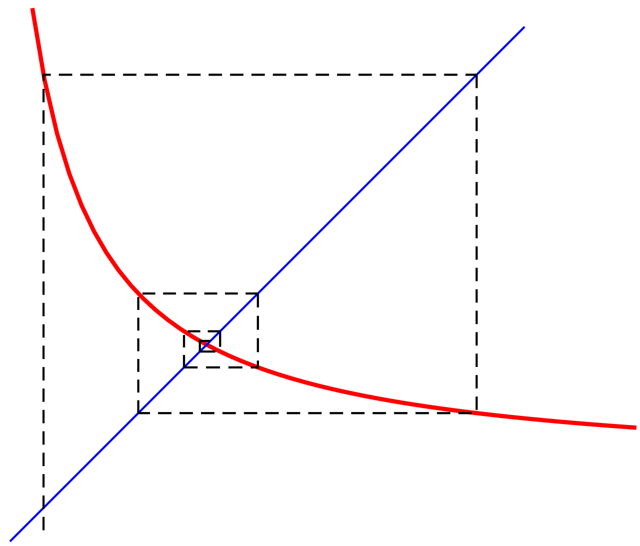


Suites numériques

Première générale
spécialité maths

Table des matières



Exercice 1 Échauffement - Rappels

1) Déterminer, en fonction de n, le signe de

$$a(n) = 2n^2 + 3n - 5, \qquad b(n) = (6-n)(n^2 - 6n + 5), \text{ et} \qquad c(n) = \frac{2n-6}{n^2-6n+5}$$

2) Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Pour un entier n quelconque, exprimer $f(n+1) - f(n)$ puis donner le signe de cette expression en fonction de n.

3) On considère l'expression $u_n = \dfrac{n-1}{n+2}$. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ puis donner le signe de cette expression en fonction de n.

4) Étudier les variations, puis tracer l'allure des courbes, des fonctions définies par les expressions :

$$f(x) = \frac{3}{x+1}, \qquad g(x) = 3 - \frac{2}{x+1}, \qquad h(x) = (2x+1)e^{3x+1}$$

5) Simplifier les expressions suivantes : $2^n \times 2^{n+1}$, $\dfrac{3^{2(n+1)}}{3^n}$, $\dfrac{1}{3}\left(3^n\right)^2$, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \dfrac{5^{n+1}}{2^{n-2}}$

I - Définition

Définition *Une suite est une fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$,*

$$u : n \mapsto u(n)$$

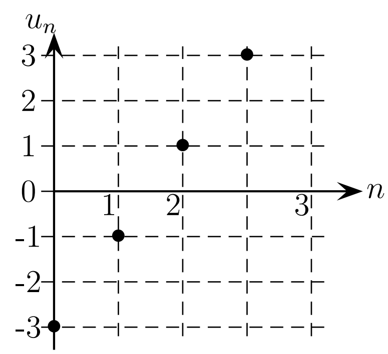
On note en général u_n le **terme d'indice** *n au lieu de $u(n)$, et la suite (u_n) au lieu de u.*
u_n est ***un*** *nombre de la suite, et (u_n) désigne* ***l'ensemble de tous les nombres*** *de la suite.*

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 3$, alors $u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$ ...

$u_{20} = \ \ldots$

$u_{50} = \ \ldots$

$u_{5250} = \ \ldots$



Une suite numérique est une suite de nombres. On peut définir une suite de deux manières :

— soit **explicitement**, avec une formule comme dans l'exemple précédent,

— soit **par récurrence**, ou implicitement : on définit les nombres de la suites de proche en proche.

1) Définition explicite

Dans l'exemple précédent, le terme général u_n est l'image de l'entier n par une fonction usuelle :

$$u_n = f(n)$$

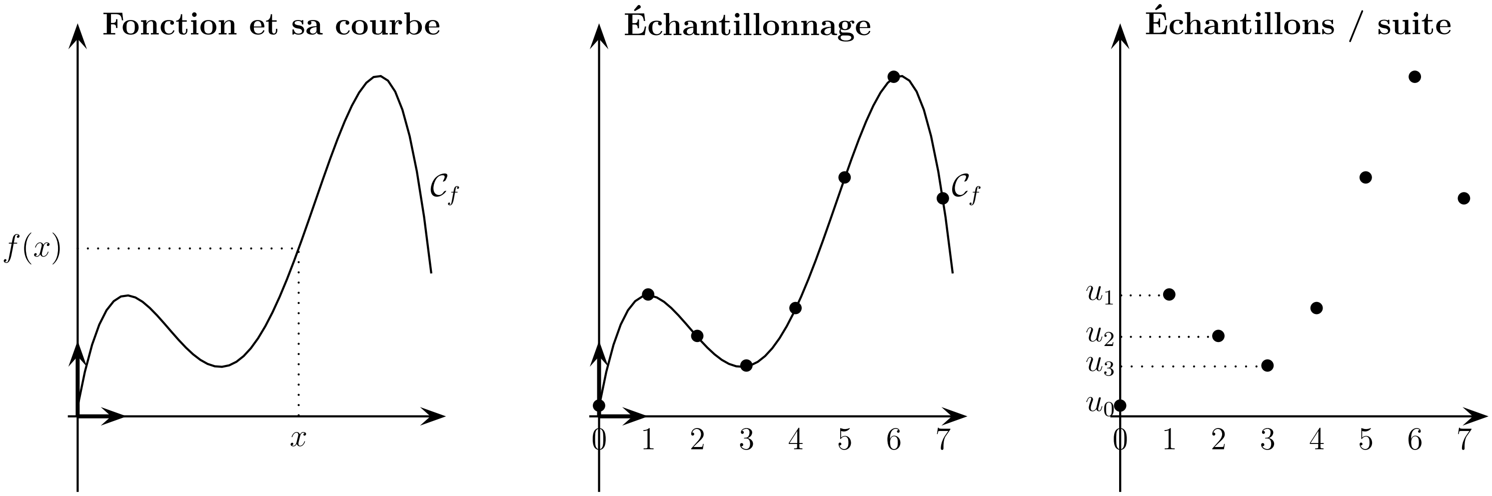
où f est la fonction affine $f : x \mapsto 2x - 3$.

Autres exemples : • $u_n = 2n^2 - 3n + 5$; $u_n = f(n)$ avec la fonction du second degré $f : x \mapsto \quad \ldots$

• $v_n = \dfrac{6n+3}{n+1}$; $v_n = g(n)$ avec la fonction rationnelle $g : x \mapsto \quad \ldots$

• $w_n = 2^n$; $w_n = h(n)$ avec la fonction exponentielle $h : x \mapsto \quad \ldots$

Remarque : $u_n = f(n)$: on ne considère que les images de f pour des valeurs entières, et non pas pour tous les nombres réels d'un intervalle : on dit alors qu'on **échantillonne**, ou qu'on **numérise**, la fonction f.



2) Définition par récurrence

On peut définir une suite en se donnant son premier terme u_0 et une relation qui permet de calculer un terme de la suite à partir de son prédécesseur : on connaît u_0, à partir duquel on peut calculer u_1, à partir duquel on peut calculer u_2, …On calcule ainsi les termes au fur et à mesure, de proche en proche.

Exercice 2 On définit la suite (u_n) par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1,04\, u_n \end{array}\right.$ Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10} et u_{50}.

Plus généralement, une suite est définie par récurrence par une relation de la forme

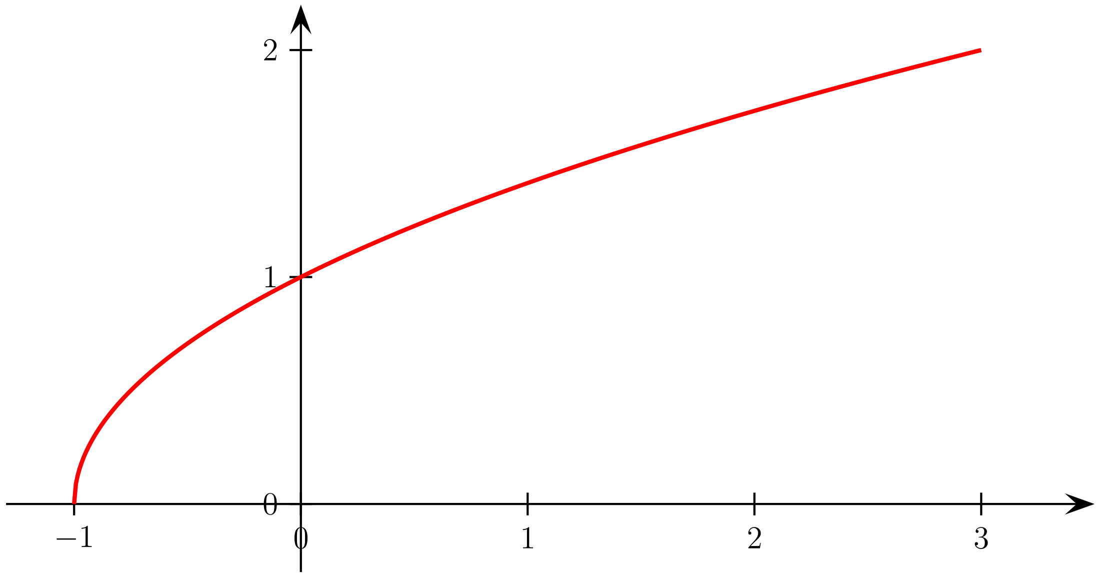
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction définie, a priori, sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Pour chaque suite suivante définie par récurrence, calculer les quatre premiers termes de la suite :

1. Suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ puis, pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
2. Suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ puis, pour tout entier n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n + 1}$.
3. Suite (w_n) définie par $w_1 = 1$ puis, pour tout entier n, $w_{n+1} = \sqrt{w_n^2 + 1}$.
4. Suite (x_n) définie par $x_1 = 0$ puis, pour tout entier n, $x_{n+1} = x_n^2 + \dfrac{1}{2n+1}$.
5. Suite (z_n) définie par $z_0 = 1$ et $z_1 = 2$ puis, pour tout entier n, $z_{n+2} = 2z_{n+1} + z_n$.

Exercice 4 On donne la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$ et sa courbe représentée sur le graphique suivant.
On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = -0,8$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis **construire graphiquement** les points d'abscisse u_1, u_2, u_3, u_4.
(On pourra s'aider de la droite d'équation $y = x$)



Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ? Vers quelle valeur limite semble-t-elle tendre ? Déterminer la valeur exacte de cette limite conjecturée.

Exercice 5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$.

a) On définie la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1 et u_2.

b) Représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$ et **construire** sur l'axe des abscisses de ce graphique les première valeurs u_1 à u_5.

c) Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ? Vers quelle valeur limite semble-t-elle tendre ?

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$ et la suite (u_n) telle que $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

c) Placer u_0 sur l'axe des abscisses puis construire graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

d) Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ? Vers quelle valeur limite semble-t-elle tendre ?

Exercice 7 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{5}{x+1}$ et la suite (u_n) telle que $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

c) Placer u_0 sur l'axe des abscisses puis construire graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

II - Sens de variation d'une suite

Définition
- *Une suite (u_n) est* **croissante** *si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.*
- *Une suite (u_n) est* **décroissante** *si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.*
- *Une suite (u_n) est* **constante** *si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.*
- *Une suite croissante ou décroissante est dite* **monotone**.
- *Une suite est* ***strictement*** *monotone, croissante ou décroissante, si les inégalités sont* ***strictes*** *: $u_{n+1} < u_n$ ou $u_{n+1} > u_n$.*

Étudier le sens de variation d'une suite (u_n) revient donc à comparer, **pour tout entier** n, les termes consécutifs u_{n+1} et u_n, soit aussi à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 8 Etudier le sens de variation des suites définies par les expressions :

a) $u_n = n^2 - n + 2$ b) $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$ c) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ d) $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$

e) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n - n$ f) $u_n = (n-5)^2$

g) $u_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ h) $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{3^n}$ i) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$

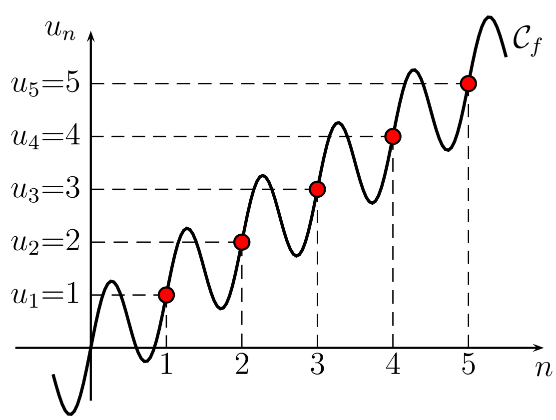
Propriété *Soit (u_n) la suite définie* **explicitement** *par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, alors (u_n) a le même sens de variation que f :*
- *si f est croissante, alors la suite (u_n) est croissante,*
- *si f est décroissante, alors la suite (u_n) est décroissante.*

Démonstration : Si par exemple f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors f conserve l'ordre, c'est-à-dire que pour tous réels $x \leqslant y$ on a $f(x) \leqslant f(y)$.

On a ici $u_n = f(n)$ et $u_{n+1} = f(n+1)$, et comme $n \leqslant n+1$, on en déduit que $f(n) \leqslant f(n+1)$ c'est-à-dire que $u_n \leqslant u_{n+1}$, et donc que (u_n) est croissante.

Remarque : La réciproque est fausse.

Par exemple, soit la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ avec la fonction $f(x) = x + \sin(2\pi x)$.
Alors, pour tout entier n, $u_n = n + \sin(2\pi n) = n$, et donc (u_n) est croissante (c'est la suite des entiers naturels), tandis que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.



Exercice 9 Étudier (de deux manières différentes !) le sens de variation des suites définies par :

a) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ *b)* $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$ *c)* $u_n = (n-5)^2$ *d)* $u_n = n - 1 + \dfrac{4}{n+1}$

e) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$ *f)* $u_n = n^2 - 10n + 26$ *g)* $u_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$

III - Suites particulières

1) Suites arithmétiques

Définition *Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité r, appelée* **raison** *de la suite, au terme précédent.*
Pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_4 \arrow[r, bend left, "+r"] & \dots & \dots & u_n \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1} & \dots \end{tikzcd}$$

Exercice 10

a) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 2$.
Alors, $u_1 = \dots$, $u_2 = \dots$, $u_3 = \dots$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \dots$.

b) Soit (v_n) la suite définie par la relation $v_n = 5n + 2$.

Alors, pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = \dots$.

On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \dots$

c) Soit la suite (w_n) définie par la relation $w_n = n^2 + 2$. Alors $w_1 = \dots$, $w_2 = \dots$, $w_3 = \dots$
Cette suite peut-elle être arithmétique ?

d) Soit (x_n) définie par $x_0 = 3$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = 2x_n + 1$.
Alors $x_1 = \dots$, $x_2 = \dots$, $x_3 = \dots$ Cette suite peut-elle être arithmétique ?

Propriété *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n,*

$$u_n = u_0 + nr$$

Pour un entier p quelconque, on a aussi

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

<u>Démonstration:</u> Par définition d'une suite arithmétique, $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$,

et donc la propriété est vraie pour les deux premiers termes.
De plus, si on la suppose vraie pour un entier p quelconque : $u_p = u_0 + pr$, alors au rang suivant, $u_{p+1} = u_p + r = (u_0 + pr) + r = u_0 + (p + 1)r$: la propriété est encore vraie pour l'entier suivant $(p + 1)$.
Ainsi la propriété s'étend, de proche en proche, à tous les entiers naturels, et donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + r$.

<u>*Remarque :*</u> *Cette technique de démonstration s'appelle une* **démonstration par récurrence**.

Avec la formule précédente, on a pour tous entiers n et p, $u_n = u_0 + mr$ et $u_p = u_0 + pr$, d'où, en soustrayant ces deux égalités,

$$u_n - u_p = (m - p)r \iff u_n = u_p + (n - p)r$$

$\square$

Exercice 11

1. Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$. Calculer u_{3002}.
2. Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_2 = 1200$ et de raison $r = -10$. Calculer v_{25}.
   À partir de quel rang la suite est-elle négative ?
3. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et $u_{25} = 17$. Calculer u_{20}.
4. La suite (u_n) est arithmétique et telle que $u_3 = 18$ et $u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 105$.
   Quelle est la raison de cette suite ? Quelle est son premier terme u_1 ?
5. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$ est-elle arithmétique ? Si oui, quelle est sa raison ?
6. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$ est-elle arithmétique ? Si oui, quelle est sa raison ?
7. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_{10} = -70$ et $u_{25} = 80$. Calculer la raison r de cette suite, puis calculer u_0 et u_{1212}.

Propriété *Une suite arithmétique de raison r est*

— *strictement croissante si $r > 0$*
— *strictement décroissante si $r < 0$*
— *constante si $r = 0$.*

Démonstration: Comme on a $u_{n+1} - u_n = r$, le signe de cette différence, donc le sens de variation de la suite, est directement donné par le signe de la raison r. □

Exercice 12 Donner le sens de varition des suites arithmétiques (u_n) suivantes : a) $u_n = 4n + 2$
b) $u_n = \dfrac{-2n+1}{3}$ c) $u_3 = 5$ et $u_{17} = 7$ d) $u_8 = \dfrac{7}{4}$ et $u_{19} = \dfrac{3}{4}$ e) $u_{n+1} = u_n + 5$

2) Suites géométriques

Définition *Une suite géométrique est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant par la même quantité q , appelée* **raison** *de la suite, le terme précédent.*
Pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} \cdots \quad \cdots \quad u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \quad \cdots$$

Exemples : • La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

• la suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, ...est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = -1$.

• Soit la suite (w_n) définie par la relation $w_n = 2 \times 3^n$. Alors, pour tout entier n, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dots$

On en déduit que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \dots$

Propriété *Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors, pour tout entier n,*

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Pour tout entier p quelconque, on a aussi

$$v_n = v_p\, q^{n-p}$$

Exercice 13

a) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,2$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$. Calculer u_4 et u_{20}.

b) Soit (u_n) une suite géométrique avec $u_1 < 0$ et $u_6 = 12$ et $u_8 = 48$. Calculer u_9 et u_1.

c) (u_n) est géométrique telle que $u_3 = 8$ et $u_3 + u_4 + u_5 = 14$. Quelle est la raison de cette suite ?

Exercice 14 On utilise une feuille de papier, d'épaisseur $e = 0,5$ mm, que l'on replie successivement en deux. Quelle est l'épaisseur de la feuille après le premier pliage ? après le deuxième ? après le $n^{\text{ème}}$?

Combien de fois faudrait-il replier cette feuille en deux pour obtenir une épaisseur supérieure à la hauteur de la tour Eiffel (environ 300 m) ?

Exercice 15 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de (u_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$.

1) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3 et conjecturer la nature de la suite (v_n).

2) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.

3) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 16 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4-u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de la suite (u_n) par la relation $v_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n}$.

Montrer que (v_n) est arithmétique. Exprimer alors v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 17 (u_n) est la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$, et (v_n) est définie par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

1) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3 et conjecturer la nature de la suite (v_n).

2) Prouver que la suite (v_n) est géométrique.

3) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

IV - Sommes des termes d'une suite

1) Suite arithmétique

Propriété *La somme des n premiers entiers naturels est :* $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\
S_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

La somme contient n termes, et donc on trouve ainsi, $2S_n = n(n+1)$, d'où la formule en divisant pas 2.
$\square$

Somme des termes d'une suite arithmétique Par exemple, $S = 5 + 8 + 11 + \cdots + 35$
On détaille chaque terme de la suite arithmétique :

$$\begin{aligned}
S &= (5+3\times 0) + (5+3\times 1) + (5+3\times 2) + \cdots + (5+3\times 10) \\
&= 11\times 5 + 3\times \Big(0+1+2+\cdots+10\Big) \\
&= 55 + 3\frac{10\times 11}{2} \\
&= 55 + 3\times 55 = 220
\end{aligned}$$

Exercice 18 Calculer les sommes $S_1 = 8+9+10+11+\cdots+50$ $S_2 = 1+3+5+\cdots+31$,
$S_3 = 2+4+6+\cdots+32$ $S_4 = 5+10+15+\cdots+55$

2) Suite géométrique

Propriété *Pour tout réel* $q \neq 1$, $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Pour $q=1$, $1+q+q^2+\cdots+q^n = 1+1+1+\cdots+1 = n+1$.

Démonstration: Pour $q \neq 1$,

$$\begin{array}{rcccccccccc}
S & = & 1 & + & q & + & q^2+\dots & + & q^{n-1} & + & q^n \\
qS & = & q & + & q^2 & + & q^3+\dots & + & q^n & + & q^{n+1} \\
\hline
S-qS & = & 1 & & & & & & & - & q^{n+1}
\end{array}$$

d'où, $S - qS = (1-q)S = 1 - q^{n+1}$ et la formule de la propriété en divisant par $1-q$. $\square$

Somme des termes d'une suite géométrique Par exemple,

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1+2+4+\cdots+1024 \\
&= 1+2+2^2+\cdots+2^{10} \\
&= \frac{1-2^{11}}{1-2} = \frac{1-2028}{-1} = 2027
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= 8+16+32+\cdots+2048 \\
&= 8\Big(1+2+4+\cdots+256\Big) \\
&= 8\Big(1+2^1+2^2+\cdots+2^8\Big) \\
&= 8\frac{1-2^9}{1-2} = 8\frac{1-512}{-1} = 8\times 511 = 4088
\end{aligned}$$

Exercice 19 Calculer les sommes : a) $S = 4 + 2 + 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625$

b) $P = 9 + 3 + 1 + \cdots + \dfrac{1}{3^6}$ c) $Q = 3 - 6 + 12 - 24 + \cdots + 3072$

Exercice 20 Clément aime la pizza mais n'ose jamais en finir une sans en laisser un peu : à chaque fois, il mange la moitié de ce qu'il reste. La première fois qu'il se sert, il mange donc la moitié de la pizza.
Quelle portion de pizza a-t-il mangé lorsqu'il s'est resservi 5 fois ? Quelle portion reste-t-il alors ?

Exercice 21 Deux amis partent pour une randonnée de 200 km. Le premier jour, ils parcourent 20 km. Chaque jour, en raison de la fatigue accumulée, leur distance parcourue diminue de 5% par rapport au jour précédent.
Quelle distance auront-ils parcouru au bout de 2 jours ? 5 jours ? À l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, déterminer le nombre de jours nécessaires pour terminer cette randonnée.

Exercice 22 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n + 4n - 3$.
On note (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = 3^n$ et $w_n = 4n - 3$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et que (w_n) est une suite arithmétique

b) Calculer $V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $W_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

c) En déduire la somme, en fonction de n, $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 23 Soit (u_n) la suite définie par les deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

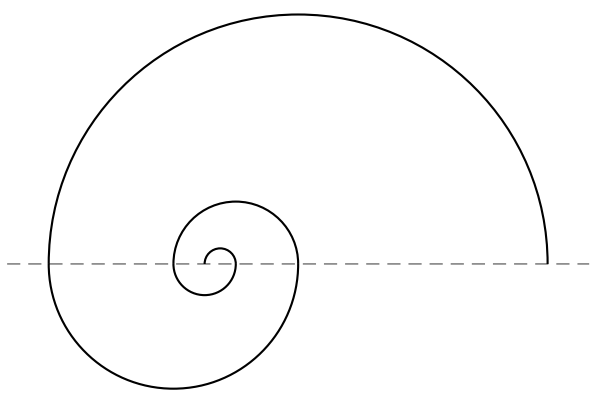
1) a) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique.

b) Exprimer alors v_n en fonction de n.

2) a) Calculer en fonction de n la somme $S_n = 0,5 + (0,5)^2 + (0,5)^3 + \cdots + (0,5)^n$.

b) Exprimer alors u_n en fonction de n.

Exercice 24 On construit une spirale à partir de demi-cercles de la façon suivante :



Le premier demi-cercle a un rayon de 10 cm. Ensuite, chaque demi-cercle a un rayon égal à la moitié du demi-cercle précédent.

1. Quelle est la longueur de la spirale dessinée sur cette figure ?
2. Quelle est la longueur de cette spirale avec 10 demi-cercles ? avec 100 ? avec 1000 ? avec 10 000 ?
   Quelle est la limite de la longueur de cette spirale ?
3. Si on prolonge indéfiniment cette spirale, on constate qu'elle converge vers un point C. Où ce point C se trouve-t-il sur le grand segment initial ?