Suites numériques - Exercices

Première générale
spécialité maths

Exercice 1 **Échauffement - Rappels**

1) Déterminer, en fonction de n, le signe de

$$a_(n) = 2n^2 + 3n - 5, \qquad b(n) = (6-n)(n^2-6n+5), \text{ et } \qquad c(n) = \frac{2n-6}{n^2-6n+5}$$

2) Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Pour un entier n quelconque, exprimer $f(n+1) - f(n)$ puis donner le signe de cette expression en fonction de n.

3) On considère l'expression $u_n = \dfrac{n-1}{n+2}$. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ puis donner le signe de cette expression en fonction de n.

4) Étudier les variations, puis tracer l'allure des courbes, des fonctions définies par les expressions :

$$f(x) = \frac{3}{x+1}, \qquad g(x) = 3 - \frac{2}{x+1}, \qquad h(x) = (2x+1)e^{3x+1}$$

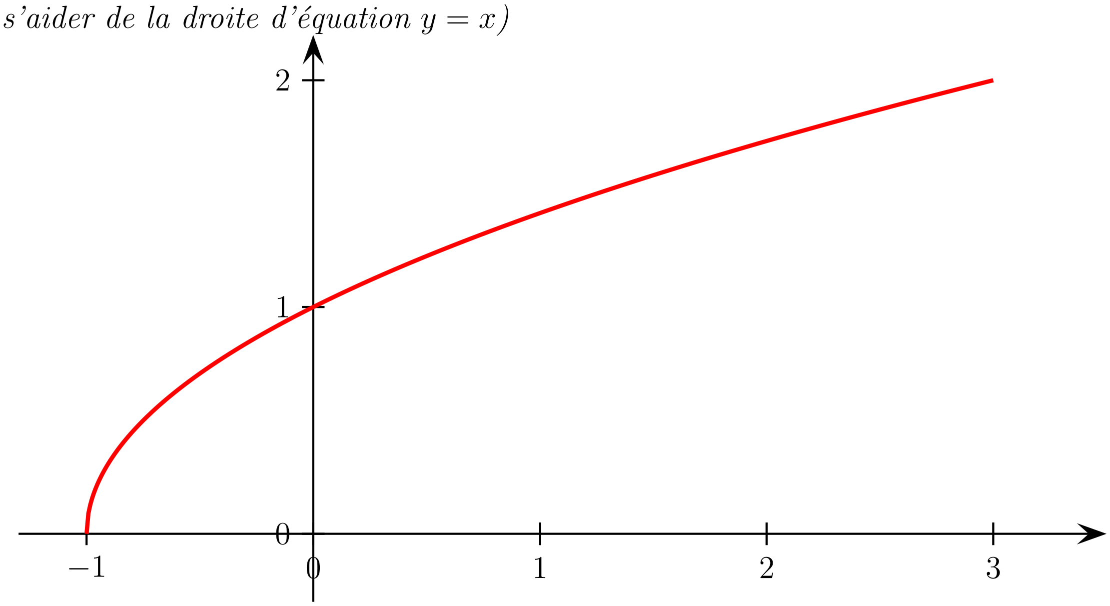
5) Simplifier les expressions suivantes : $2^n \times 2^{n+1}$, $\dfrac{3^{2(n+1)}}{3^n}$, $\dfrac{1}{3}(3^n)^2$, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \dfrac{5^{n+1}}{2^{n-2}}$

Exercice 2 On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1,04\, u_n \end{cases}$ Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10} et u_{50}.

Exercice 3 Pour chaque suite suivante définie par récurrence, calculer les quatre premiers termes :

1. Suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ puis, pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
2. Suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ puis, pour tout entier n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n + 1}$.
3. Suite (w_n) définie par $w_1 = 1$ puis, pour tout entier n, $w_{n+1} = \sqrt{w_n^2 + 1}$.
4. Suite (x_n) définie par $x_1 = 0$ puis, pour tout entier n, $x_{n+1} = x_n^2 + \dfrac{1}{2n+1}$.
5. Suite (z_n) définie par $z_0 = 1$ et $z_1 = 2$ puis, pour tout entier n, $z_{n+2} = 2z_{n+1} + z_n$.

Exercice 4 On donne la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$ et sa courbe représentée sur la graphique suivant.
On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = -0,8$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis **construire graphiquement** les points d'abscisse u_1, u_2, u_3, u_4.
(On pourra s'aider de la droite d'équation $y = x$)



Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ? Vers quelle valeur limite semble-t-elle tendre ? Déterminer la valeur exacte de cette limite conjecturée.

Exercice 5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$.

a) On définie la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1 et u_2.

b) Représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$ et **construire** sur l'axe des abscisses de ce graphique les première valeurs u_1 à u_5.

c) Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ? Vers quelle valeur limite semble-t-elle tendre ?

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$ et la suite (u_n) telle que $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

c) Placer u_0 sur l'axe des abscisses puis construire graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

d) Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ? Vers quelle valeur limite semble-t-elle tendre ?

Exercice 7 On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{5}{x+1}$ et la suite (u_n) telle que $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

c) Placer u_0 sur l'axe des abscisses puis construire graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

Exercice 8 Etudier le sens de variation des suites définies par les expressions :

a) $u_n = n^2 - n + 2$ b) $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$ c) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ d) $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$

e) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n - n$ f) $u_n = (n-5)^2$

g) $u_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ h) $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{3^n}$ i) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$

Exercice 9 Étudier (de deux manières différentes !) le sens de variation des suites définies par :

a) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ *b)* $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$ *c)* $u_n = (n-5)^2$ *d)* $u_n = n - 1 + \dfrac{4}{n+1}$

e) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$ *f)* $u_n = n^2 - 10n + 26$ *g)* $u_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$

Exercice 10

a) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 2$.
Alors, $u_1 = \ \ldots$, $u_2 = \ \ldots$, $u_3 = \ \ldots$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ \ldots$.

b) Soit (v_n) la suite définie par la relation $v_n = 5n + 2$.

Alors, pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = \ldots$.

On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ \ldots$

c) Soit la suite (w_n) définie par la relation $w_n = n^2 + 2$. Alors $w_1 = \ldots$, $w_2 = \ldots$, $w_3 = \ldots$
Cette suite peut-elle être arithmétique ?

d) Soit (x_n) définie par $x_0 = 3$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = 2x_n + 1$.
Alors $x_1 = \ldots$, $x_2 = \ldots$, $x_3 = \ldots$ Cette suite peut-elle être arithmétique ?

Exercice 11

1. Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$. Calculer u_{3002}.
2. Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_2 = 1200$ et de raison $r = -10$. Calculer v_{25}. À partir de quel rang la suite est-elle négative ?
3. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et $u_{25} = 17$. Calculer u_{20}.
4. La suite (u_n) est arithmétique et telle que $u_3 = 18$ et $u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 105$. Quelle est la raison de cette suite ? Quelle est son premier terme u_1 ?
5. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$ est-elle arithmétique ? Si oui, quelle est sa raison ?
6. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$ est-elle arithmétique ? Si oui, quelle est sa raison ?
7. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_{10} = -70$ et $u_{25} = 80$. Calculer la raison r de cette suite, puis calculer u_0 et u_{1212}.

Exercice 12 Donner le sens de variation des suites arithmétiques (u_n) suivantes : a) $u_n = 4n + 2$
b) $u_n = \dfrac{-2n+1}{3}$ c) $u_3 = 5$ et $u_{17} = 7$ d) $u_8 = \dfrac{7}{4}$ et $u_{19} = \dfrac{3}{4}$ e) $u_{n+1} = u_n + 5$

Exercice 13

a) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,2$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$. Calculer u_4 et u_{20}.

b) Soit (u_n) une suite géométrique avec $u_1 < 0$ et $u_6 = 12$ et $u_8 = 48$. Calculer u_9 et u_1.

c) (u_n) est géométrique telle que $u_3 = 8$ et $u_3 + u_4 + u_5 = 14$. Quelle est la raison de cette suite ?

Exercice 14 On utilise une feuille de papier, d'épaisseur $e = 0,5$ mm, que l'on replie successivement en deux. Quelle est l'épaisseur de la feuille après le premier pliage ? après le deuxième ? après le $n^{\text{ème}}$?

Combien de fois faudrait-il replier cette feuille en deux pour obtenir une épaisseur supérieure à la hauteur de la tour Eiffel (environ 300 m) ?

Exercice 15 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de (u_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$.

1) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3 et conjecturer la nature de la suite (v_n).

2) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.

3) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 16 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4-u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de la suite (u_n) par la relation $v_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n}$.

Montrer que (v_n) est arithmétique. Exprimer alors v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 17 (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$, et (v_n) est définie par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

1) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3 et conjecturer la nature de la suite (v_n).

2) Prouver que la suite (v_n) est géométrique.

3) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 18 Calculer les sommes $S_1 = 8 + 9 + 10 + 11 + \cdots + 50$ $S_2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 31$,

$S_3 = 2 + 4 + 6 + \cdots + 32$ $S_4 = 5 + 10 + 15 + \cdots + 55$

Exercice 19 Calculer les sommes : a) $S = 4 + 2 + 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625$

b) $P = 9 + 3 + 1 + \cdots + \dfrac{1}{3^6}$ c) $Q = 3 - 6 + 12 - 24 + \cdots + 3072$

Exercice 20 Clément aime la pizza mais n'ose jamais en finir une sans en laisser un peu : à chaque fois, il mange la moitié de ce qu'il reste. La première fois qu'il se sert, il mange donc la moitié de la pizza.
Quelle portion de pizza a-t-il mangé lorsqu'il s'est resservi 5 fois ? Quelle portion reste-t-il alors ?

Exercice 21 Deux amis partent pour une randonnée de 200 km. Le premier jour, ils parcourent 20 km. Chaque jour, en raison de la fatigue accumulée, leur distance parcourue diminue de 5% par rapport au jour précédent.
Quelle distance auront-ils parcouru au bout de 2 jours ? 5 jours ? À l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, déterminer le nombre de jours nécessaires pour terminer cette randonnée.

Exercice 22 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n + 4n - 3$.
On note (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = 3^n$ et $w_n = 4n - 3$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et que (w_n) est une suite arithmétique

b) Calculer $V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $W_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

c) En déduire la somme, en fonction de n, $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 23 Soit (u_n) la suite définie par les deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

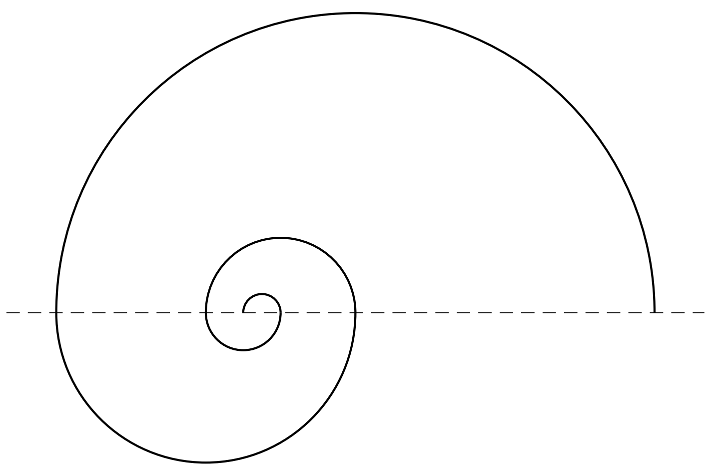
1) a) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique.

b) Exprimer alors v_n en fonction de n.

2) a) Calculer en fonction de n la somme $S_n = 0,5 + (0,5)^2 + (0,5)^3 + \cdots + (0,5)^n$.

b) Exprimer alors u_n en fonction de n.

Exercice 24 On construit une spirale à partir de demi-cercles de la façon suivante :



Le premier demi-cercle a un rayon de 10 cm. Ensuite, chaque demi-cercle a un rayon égal à la moitié du demi-cercle précédent.

1. Quelle est la longueur de la spirale dessinée sur cette figure ?
2. Quelle est la longueur de cette spirale avec 10 demi-cercles ? avec 100 ? avec 1000 ? avec 10 000 ? Quelle est la limite de la longueur de cette spirale ?
3. Si on prolonge indéfiniment cette spirale, on constate qu'elle converge vers un point C. Où ce point C se trouve-t-il sur le grand segment initial ?