Somme des termes d'une suite

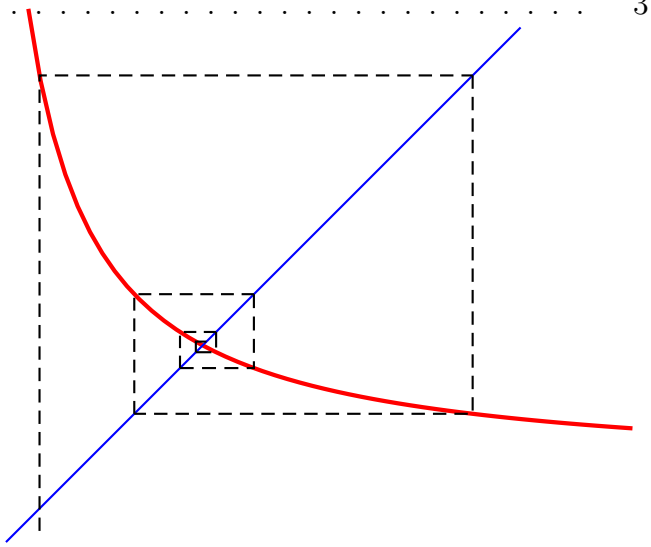
Première générale
spécialité maths

Table des matières

1) Rappels sur les suites 2

2) Somme des termes d'une suite arithmétique 2

3) Somme des termes d'une suite géométrique 3



1) Rappels sur les suites

Exercice 1

1. Soit u_n une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.
   Calculer : $u_1 = \dots$, $u_2 = \dots$, $u_{10} = \dots$, $u_{100} = \dots$
2. Soit v_n une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $r = 2$.
   Calculer : $v_1 = \dots$, $v_2 = \dots$, $v_{10} = \dots$, $v_{100} = \dots$

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 3$, pour tour entier $n \geqslant 1$.

1. Calculer les premiers termes u_1 et u_2.
2. On pose $v_n = u_n - 3$ pour tout entier n.
   a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3 Les vacances arrivent. La première nuit de mes vacances, je dors 9 heures (le rythme scolaire reste ...). Ensuite, chaque nuit je dors 30 minutes de plus que la nuit précédente.
Quelle va être la durée de ma nuit de sommeil au bout d'une semaine de vacances ?
Combien de temps, au total, vais-je dormir pendant cette première semiane de vacances ?

2) Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété *La somme des n premiers entiers naturels est :* $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\
S_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

La somme contient n termes, et donc on trouve ainsi, $2S_n = n(n+1)$, d'où la formule en divisant pas 2. □

Somme des termes d'une suite arithmétique Par exemple, $S = 5 + 8 + 11 + \cdots + 35$
On détaille chaque terme de la suite arithmétique :

$$\begin{aligned}
S &= (5 + 3 \times 0) + (5 + 3 \times 1) + (5 + 3 \times 2) + \cdots + (5 + 3 \times 10) \\
&= 11 \times 5 + 3 \times \Big(0 + 1 + 2 + \cdots + 10\Big) \\
&= 55 + 3\frac{10 \times 11}{2} \\
&= 55 + 3 \times 55 = 220
\end{aligned}$$

Exercice 4 Calculer les sommes $S_1 = 8 + 9 + 10 + 11 + \cdots + 50$ $S_2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 31$,
$S_3 = 2 + 4 + 6 + \cdots + 32$ $S_4 = 5 + 10 + 15 + \cdots + 55$

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété *Pour tout réel* $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Pour $q = 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$.

Démonstration: Pour $q \neq 1$,

$$\begin{array}{rcccccccccc} S & = & 1 & + & q & + & q^2 + \ldots & + & q^{n-1} & + & q^n \\ qS & = & q & + & q^2 & + & q^3 + \ldots & + & q^n & + & q^{n+1} \\ \hline S - qS & = & 1 & & & & & & & - & q^{n+1} \end{array}$$

d'où, $S - qS = (1 - q)S = 1 - q^{n+1}$ et la formule de la propriété en divisant par $1 - q$. □

Somme des termes d'une suite géométrique Par exemple,

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 2 + 4 + \cdots + 1024 \\ &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10} \\ &= \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \frac{1 - 2028}{-1} = 2027 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= 8 + 16 + 32 + \cdots + 2048 \\ &= 8\Big(1 + 2 + 4 + \cdots + 256\Big) \\ &= 8\Big(1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8\Big) \\ &= 8\frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 8\frac{1 - 512}{-1} = 8 \times 511 = 4088 \end{aligned}$$

Exercice 5 Calculer les sommes : a) $S = 4 + 2 + 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625$

b) $P = 9 + 3 + 1 + \cdots + \dfrac{1}{3^6}$ c) $Q = 3 - 6 + 12 - 24 + \cdots + 3072$

Exercice 6 **Échiquier de Sissa**

Selon la légende (source Wikipédia), en Inde, le roi Belkib (ou Bathait), qui s'ennuie à la cour, demande qu'on lui invente un jeu pour le distraire. Le sage Sissa invente alors un jeu d'échecs, ce qui ravit le roi. Pour remercier Sissa, le roi lui demande de choisir sa récompense, aussi fastueuse qu'elle puisse être. Sissa choisit de demander au roi de prendre le plateau du jeu et, sur la première case, poser un grain de riz, ensuite deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que l'on met. Le roi et la cour sont amusés par la modestie de cette demande.

Calculer le nombre de grains de riz que le roi doit réunir pour satisfaire à la demande de Sissa.

Supposons qu'un grain de riz pèse environ 0,1 g. Quel quantité de riz représente alors la demande de Sissa ?

La productioin mondiale étant d'environ 1 milliard de tonnes par an. Quelle durée faudrait-il pour réunir cette quantité de riz ?

Exercice 7 Clément aime la pizza mais n'ose jamais en finir une sans en laisser un peu : à chaque fois, il mange la moitié de ce qu'il reste. La première fois qu'il se sert, il mange donc la moitié de la pizza.

Quelle portion de pizza a-t-il mangé lorsqu'il s'est resservi 5 fois ? Quelle portion reste-t-il alors ?

Exercice 8 Deux amis partent pour une randonnée de 200 km. Le premier jour, ils parcourent 20 km. Chaque jour, en raison de la fatigue accumulée, leur distance parcourue diminue de 5% par rapport au jour

précédent.
Quelle distance auront-ils parcouru au bout de 2 jours ? 5 jours ? À l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, déterminer le nombre de jours nécessaires pour terminer cette randonnée.

Exercice 9 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n + 4n - 3$.
On note (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = 3^n$ et $w_n = 4n - 3$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et que (w_n) est une suite arithmétique

b) Calculer $V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $W_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

c) En déduire la somme, en fonction de n, $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 10 Soit (u_n) la suite définie par les deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

1) a) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique.
   b) Exprimer alors v_n en fonction de n.
2) a) Calculer en fonction de n la somme $S_n = 0,5 + (0,5)^2 + (0,5)^3 + \cdots + (0,5)^n$.
   b) Exprimer alors u_n en fonction de n.

Exercice 11 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

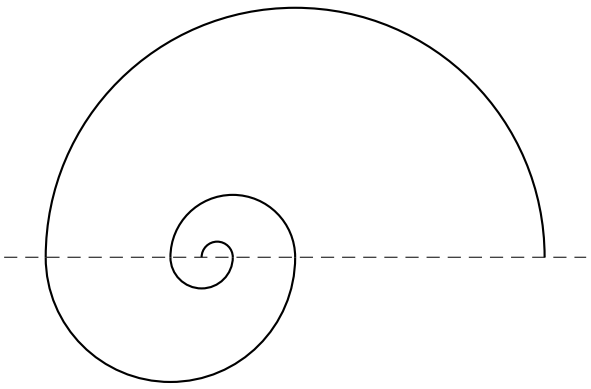
a) Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

b) On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

c) Donner alors l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
Vers quelle valeurs semble tendre u_n lorsque n tend vers l'infini ?

d) Calculer la somme $S_{100} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.

Exercice 12 On construit une spirale à partir de demi-cercles de la façon suivante :



Le premier demi-cercle a un rayon de 10 cm. Ensuite, chaque demi-cercle a un rayon égal à la moitié du demi-cercle précédent.

1. Quelle est la longueur de la spirale dessinée sur cette figure ?
2. Quelle est la longueur de cette spirale avec 10 demi-cercles ? avec 100 ? avec 1000 ? avec 10 000 ?
   Quelle est la limite de la longueur de cette spirale ?
3. Si on prolonge indéfiniment cette spirale, on constate qu'elle converge vers un point C. Où ce point C se trouve-t-il sur le grand segment initial ?