Produit scalaire

Spécialité mathématiques
Première générale

Table des matières

I - Échauffements - Rappels

Exercice 1 Soit, dans un RON (repère orthonormé) les points $A(1;2)$, $B(4;3)$ et $C(6;-1)$.
Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et les longueurs AB et AC.

Exercice 2 Rappeler les formules de trigonométrie, cosinus, sinus et tangente dans un triangle rectangle.
Que vaut la hauteur dans un triangle équilatéral de côté 1 ? que vaut son aire ?

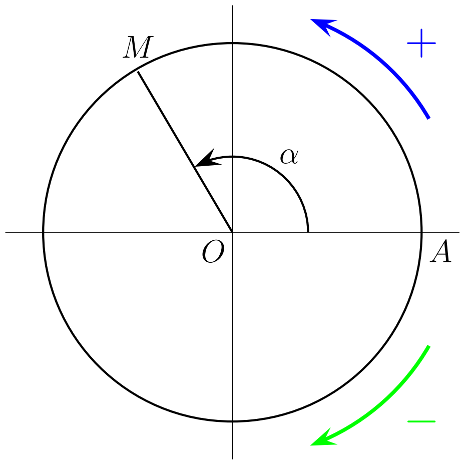
Exercice 3

a) Rappeler la relation de Chasles.

b) Dans un repère, on donne $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}$.

II - Mesure d'un angle en radian



• Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté.

• Sur un cercle trigonométrique, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est la mesure en radian de l'angle α :

$$\widehat{AOM} = \overset{\frown}{AM} = \alpha \text{ radians}$$

$\times\dfrac{\pi}{180}$

α (deg)	0	45	60	90	135	180	270	360	-60	-120
α (rad)										

$\times\dfrac{180}{\pi}$

Sur un cercle re rayon R, si $\widehat{AOM} = \alpha$ rad, alors $\overset{\frown}{AM} = R\alpha$.

Si $\overset{\frown}{AM} = \alpha$, alors $\overset{\frown}{AM} = \alpha + 2\pi \equiv \alpha + 4\pi \equiv \cdots \equiv \alpha - 2\pi \equiv \alpha - 4\pi \equiv \ldots$.
On note $\overset{\frown}{AM} \equiv \alpha\ [2\pi]$, ou $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés

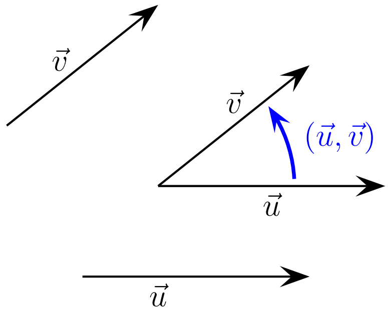
- *On appelle* **mesures** *de l'angle orienté* $\widehat{AOM}$ *tous les réels de la forme* $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- *On appelle* **mesure principale** *la mesure de l'angle dans l'intervalle* $]-\pi;\pi]$.

Exercice 4 Donner la mesure principale de :

• $-\dfrac{5\pi}{4}$ • $\dfrac{11\pi}{4}$ • $-\dfrac{11\pi}{4}$ • $-\dfrac{13\pi}{4}$ • $\dfrac{27\pi}{4}$ • $\dfrac{2005\pi}{4}$ • $\dfrac{37\pi}{6}$ • $\dfrac{178\pi}{8}$

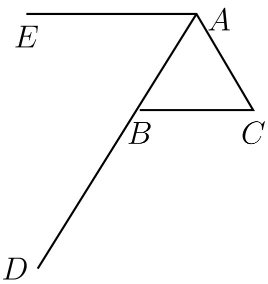
III - Angle orienté d'un couple de vecteurs

Définition ***L'angle orienté*** *formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine se note $(\vec{u}, \vec{v})$.*



Exercice 5 ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $(AE) // (BC)$.

Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés :
$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$,

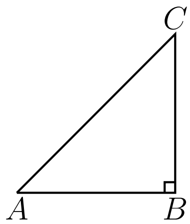


IV - Trigonométrie

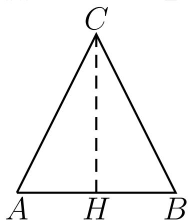
1) Cosinus et sinus d'un angle

Exercice 6

1. On s'intéresse à un triangle ABC isocèle rectangle en B et d'hypothénuse $AC = 1$.
   Rappeler la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et calculer son cosinus et son sinus.

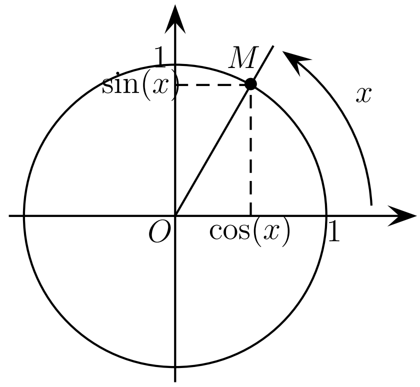


2. On s'intéresse à un triangle ABC équilatéral de côté 1.
   Rappeler la mseure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et calculer son cosinus et son sinus.



Définition *Soit $x \in \mathbb{R}$ et M le point du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.*

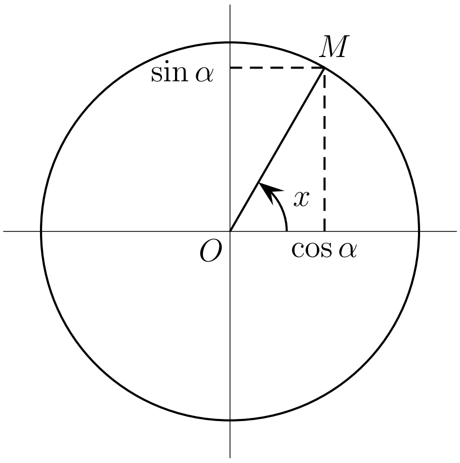
Le cosinus, noté $\cos(x)$, de x est l'abscisse de M ; son sinus, noté $\sin(x)$, est son ordonnée.



2) Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Propriété *Pour tout réel x :*



- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$; $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$; $\sin(\pi - x) = \sin(x)$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$; $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$;
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$;
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$;

Exercice 7 Donner les valeurs exactes de :

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$; $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$; $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Exercice 8

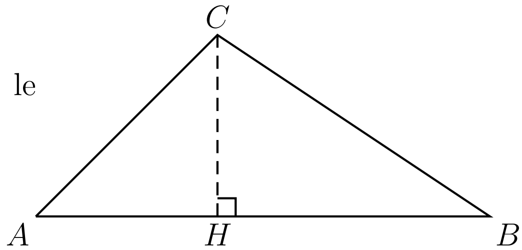
1. Soit $x \in [0; \pi]$ tel que $\cos x = -\dfrac{1}{4}$. Déterminer $\sin(x)$.
2. Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin x = \dfrac{3}{5}$. Déterminer $\cos(x)$.

V - Produit scalaire

1) Défaut d'orthogonalité

Exercice 9 Défaut d'orthogonalité

ABC est un triangle quelconque du plan. On désigne par H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
On note
$$\Delta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

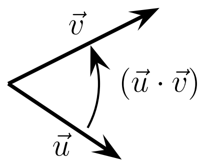


1. Quelle est la valeur de Δ si le triangle est rectangle en A ?
2. On suppose que l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un angle aigu.
   a) Où se situe le point H ?
   b) En utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles AHC et CHB et en développant $AB^2 = (AH + HB)^2$, montrer que $\Delta = AB \times AH$.
3. On suppose maintenant que l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est obtus.
   Faire une figure et démontrer de même que précédemment que $\Delta = -AB \times AH$.
4. Montrer alors que, dans les deux cas, on a $\Delta = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
5. On se place dans un RON $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ dans lequel on a les coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
   a) En utilisant la relation de Chasles écrire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   b) Prouver alors que $\Delta = xx' + yy'$.

L'expression Δ étudiée et calculer de diverses façons dans cet exercice permet d'étudier des triangles qui ne sont pas forcément rectangles.
Ce « défaut d'orthogonalité Δ » est précisément ce qu'on appelle ***produit scalaire****.*

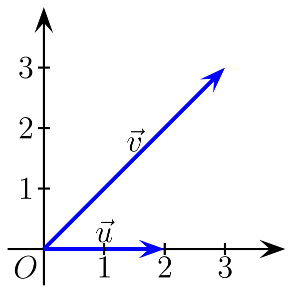
2) Définition du produit scalaire - Formule trigonométrique

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le nombre, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\| \,.\, \cos(\vec{u}, \vec{v})$.



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{u}\| \,.\, \cos(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

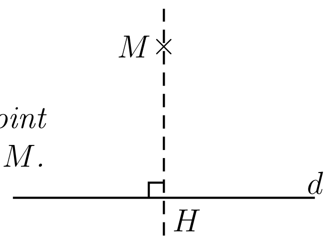
Exemple :



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 3\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6$$

Exercice 10 a) Dans un triangle équilatéral ABC de côté 1, calcul le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
b) Dans un rectangle $ABCD$, que vaut $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$?

3) Formule du projeté orthogonal

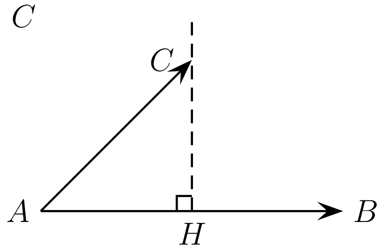


Définition *Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point d'intersection de la droite d et de la perpendiculaire à d passant par M.*

Propriété *Soit trois points A, B et C et H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors,*

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

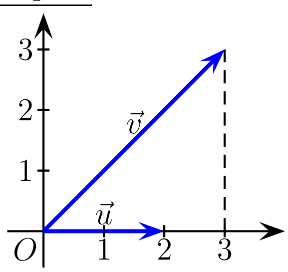
Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $H \in [AB]$
ou $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $H \notin [AB]$.



4) Expression analytique du produit scalaire

Propriété *Soit dans un RON deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.*

Exemple :



On a vu que : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 3\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6$

En projetant sur l'axe des abscisses, on a directement que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 3 = 6$.

Avec les coordonnées : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 3 + 0 \times 3 = 6$$

Exercice 11 Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1/2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\vec{u}$

Exercice 12 Dans chaque cas calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et en déduire une valeur de l'angle $\widehat{BAC}$:

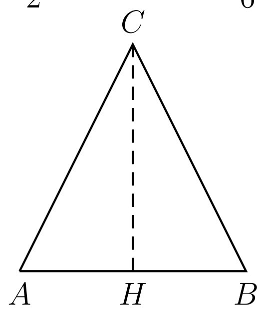
a) $A(2;3)$, $B(4;-1)$ et $C(3;6)$ b) $A(-1;2)$, $B(-3;-3)$ et $C(5;4)$ c) $A(1;2)$, $B(4;8)$ et $C(-1;3)$

Exercice 13 Dans le plan rapporté à un RON, on considère les points $A(0;1)$, $B(-1;-6)$, $C(13;-8)$ et $D(-8;-5)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 14 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de x pour que :

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$ a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux b) $(\vec{u},\vec{v})=0$ c) $(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\pi}{3}$ d) $(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\pi}{2}$ e) $(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\pi}{6}$

Exercice 15 ABC est un triangle équilatéral de côté 1. I est le pied de la hauteur issue de C.



1. Déterminer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}$
2. Calculer les produits scalaires précédents en utilisant un RON $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$.

5) Propriétés du produit scalaire

Propriétés

- *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :*

$$\boxed{\vec{u}\perp\vec{v}\iff\vec{u}\cdot\vec{v}=0}$$

- *Le produit scalaire est symétrique : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$*
- *Le produit scalaire est bilinéaire : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$*

$$\vec{u}\cdot(k\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

- *Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ avec lui-même, appelé* **carré scalaire** *et noté $\vec{u}^2$, est*

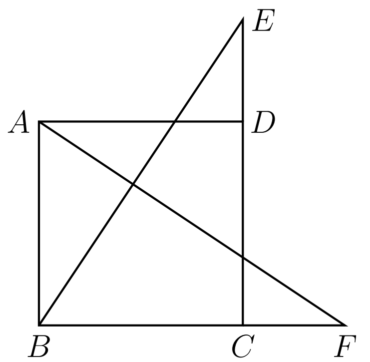
$$\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$$

Exercice 16 Soit ABC un triangle tel que $AB=4$, $AC=3$ et $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$.
2. L'angle $\widehat{ACB}$ est-il aigu ou obtus ?

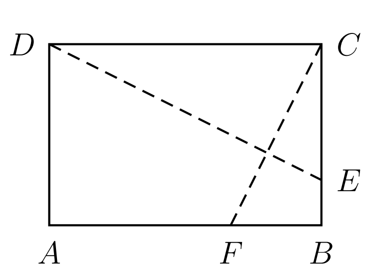
Exercice 17 $ABCD$ est un carré de côté 1, et E et F sont deux points tels que $\overrightarrow{CE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires :



1. Par un calcul vectoriel.
2. En se plaçant dans le repère $\left(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$.

Exercice 18 $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = \frac{3}{2}BC$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

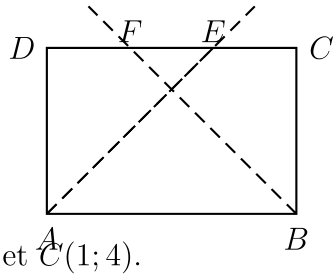


Montrer que les droites (DE) et (CF) sont perpendiculaires :

a) Par un calcul vectoriel

b) En se plaçant dans un repère (on pourra montrer pour commencer que $AF = AD$).

Exercice 19 $ABCD$ est un rectangle dans lequel on place les points E et F sur le segment $[CD]$ tels que $DE = FC = BC$.
Montrer que les droites (DE) et (CF) sont perpendiculaires.



Exercice 20 On considère, dans un RON, les points $A(-4;-2)$, $B(2;-3)$ et $C(1;4)$.
Parmi les points suivants : $D(0;-2)$, $E\left(\frac{1}{2};1\right)$, $F(2;7)$, quels sont ceux qui appartiennent à la hauteur issue de C dans le triangle ABC ?

Exercice 21 On considère le point $A(1;3)$ et la droite d d'équation $y = 2x - 1$. On note de plus H le projeté orthogonal de A sur la droite d.

a) Faire une figure.

b) Donner les coordonées de 2 points de la droite d. En déduire un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.

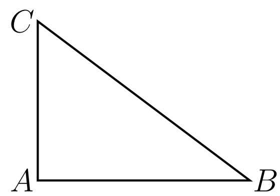
c) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$?
En exprimant de plus que $H \in d$, calculer alors les coordonnées de H.

d) Calculer la distance de A à la droite d.

Corollaire *Identités remarquables scalaires :*

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$

Théorème Pythagore !
ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$.



Démonstration: $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$

Ainsi, $BC^2 = AB^2 + AC^2 \iff \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ orthogonaux □

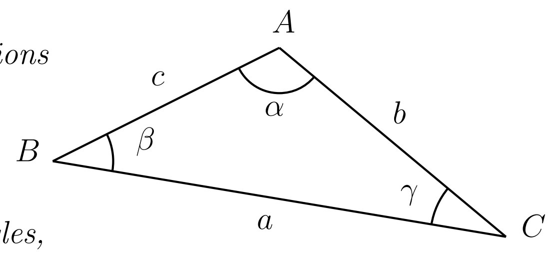
Cette démonstration du théorème de Pythagore est efficace et s'applique même à tous les triangles quelconques.

Théorème *Formule d'Al-Kashi*
Dans un triangle ABC quelconque, avec les notations ci-contre, on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

ainsi que, en permutant les sommets, côtés et angles,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$



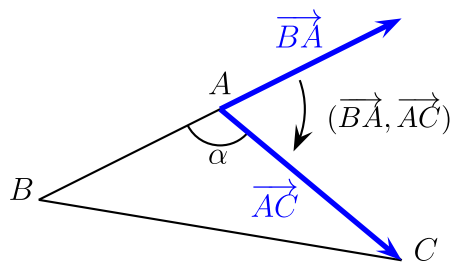
Démonstration: On reprend la démonstration du théorème de Pythagore, sans s'arrêter cette fois au cas d'orthogonalité.

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$$

soit avec les notations proposées

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$$

Il reste à préciser l'angle et son cosinus avec nos notations :



On a donc

$$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

d'où la formule d'Al-Kashi. □

Exercice 22 Soit ABC un triangle avec $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 22°$

Déterminer toutes les longueurs et les angles de ce triangle.

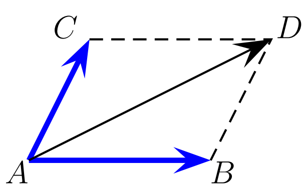
6) Produit scalaire et normes

On a vu l'identité remarquable : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

En isolant le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans cette expression, on obtient

Propriété ***Formules du produit scalaire avec des normes*** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[(\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2\right]$

On peut aussi utiliser facilement, comme on vient de le faire, l'identité remarquable directement plutôt que la formule. Par exemple,



$$\begin{array}{rcl} & \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 & = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{AD}^2 & = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \iff & AD^2 & = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{array}$$

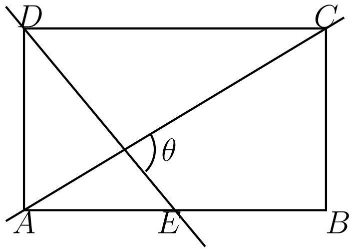
d'où on tire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AD^2 - AB^2 - AC^2\right)$

Exercice 23 $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
2. Déterminer une valeur approchée des mesures des angles $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right)$.

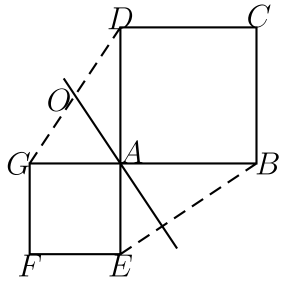
VI - Exercices

Exercice 24 $ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$. E est le milieu de $[AB]$.



1. Calculer les longueurs AC et DE.
2. En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}$.
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC}\right)$ à 10^{-2} degré près.
4. Introduire un RON, donner les coordonnées des points A, C, D et E et calculer une valeur de l'angle θ.

Exercice 25



$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de côtés respectifs 6 cm et 4 cm.
O est le milieu de $[GD]$.
Les droites (OA) et (EB) sont-elles perpendiculaires ?