Produit scalaire - Exercices

Spécialité mathématiques
Première générale

I - Échauffements - Rappels

Exercice 1 Soit, dans un RON (repère orthonormé) les points $A(1;2)$, $B(4;3)$ et $C(6;-1)$.
Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et les longueurs AB et AC.

Exercice 2 Rappeler les formules de trigonométrie, cosinus, sinus et tangente dans un triangle rectangle.
Que vaut la hauteur dans un triangle équilatéral de côté 1 ? que vaut son aire ?

Exercice 3

a) Rappeler la relation de Chasles.

b) Dans un repère, on donne $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}$.

II - Angle en radian et trigonométrie

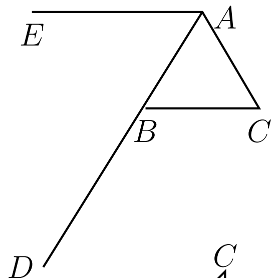
Exercice 4 Donner la mesure principale de :

- $-\dfrac{5\pi}{4}$
- $\dfrac{11\pi}{4}$
- $-\dfrac{11\pi}{4}$
- $-\dfrac{13\pi}{4}$
- $\dfrac{27\pi}{4}$
- $\dfrac{2005\pi}{4}$
- $\dfrac{37\pi}{6}$
- $\dfrac{178\pi}{8}$

Exercice 5 ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ et $(AE)\,//\,(BC)$.

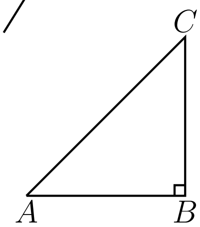
Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés :

$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)$,

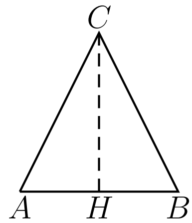


Exercice 6

1. On s'intéresse à un triangle ABC isocèle rectangle en B et d'hypothénuse $AC=1$.
   Rappeler la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et calculer son cosinus et son sinus.



2. On s'intéresse à un triangle ABC équilatéral de côté 1.
   Rappeler la mseure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et calculer son cosinus et son sinus.



Exercice 7 Donner les valeurs exactes de :

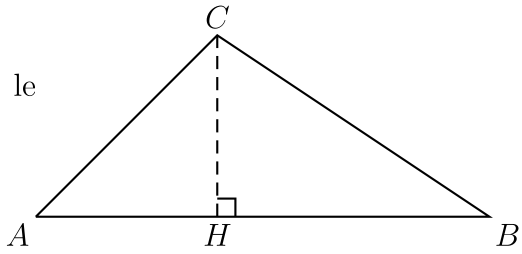
$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$; $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$; $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Exercice 8

1. Soit $x\in[0;\pi]$ tel que $\cos x=-\dfrac{1}{4}$. Déterminer $\sin(x)$.
2. Soit $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ tel que $\sin x=\dfrac{3}{5}$. Déterminer $\cos(x)$.

III - Produit scalaire

Exercice 9 Défaut d'orthogonalité



ABC est un triangle quelconque du plan. On désigne par H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
On note
$$\Delta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

1. Quelle est la valeur de Δ si le triangle est rectangle en A ?
2. On suppose que l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un angle aigu.
   a) Où se situe le point H ?
   b) En utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles AHC et CHB et en développant $AB^2 = (AH + HB)^2$, montrer que $\Delta = AB \times AH$.
3. On suppose maintenant que l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est obtus.
   Faire une figure et démontrer de même que précédemment que $\Delta = -AB \times AH$.
4. Montrer alors que, dans les deux cas, on a $\Delta = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
5. On se place dans un RON $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ dans lequel on a les coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
   a) En utilisant la relation de Chasles écrire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   b) Prouver alors que $\Delta = xx' + yy'$.

Exercice 10 a) Dans un triangle équilatéral ABC de côté 1, calcul le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
b) Dans un rectangle $ABCD$, que vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$?

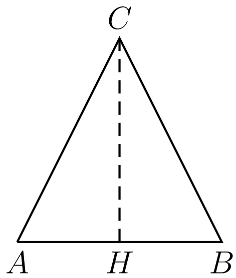
Exercice 11 Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec
a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \vec{u}$

Exercice 12 Dans chaque cas calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire une valeur de l'angle $\widehat{BAC}$:
a) $A(2; 3)$, $B(4; -1)$ et $C(3; 6)$ b) $A(-1; 2)$, $B(-3; -3)$ et $C(5; 4)$ c) $A(1; 2)$, $B(4; 8)$ et $C(-1; 3)$

Exercice 13 Dans le plan rapporté à un RON, on considère les points $A(0; 1)$, $B(-1; -6)$, $C(13; -8)$ et $D(-8; -5)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 14 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de x pour que :
a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$ a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux b) $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ c) $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ d) $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ e) $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$

Exercice 15 ABC est un triangle équilatéral de côté 1. I est le pied de la hauteur issue de C.



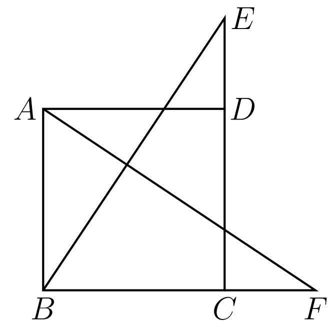
1. Déterminer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB}$
2. Calculer les produits scalaires précédents en utilisant un RON $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.

Exercice 16 Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.
2. L'angle $\widehat{ACB}$ est-il aigu ou obtus ?

Exercice 17 $ABCD$ est un carré de côté 1, et E et F sont deux points tels que $\overrightarrow{CE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires :

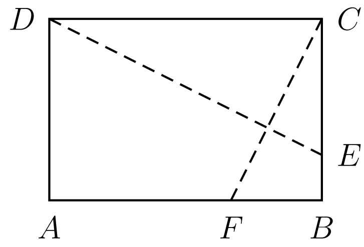
1. Par un calcul vectoriel.
2. En se plaçant dans le repère $\left(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$.



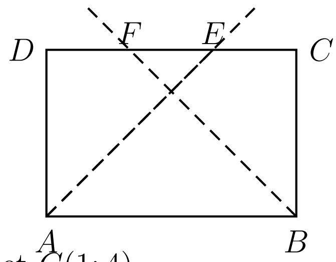
Exercice 18 $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = \dfrac{3}{2}BC$ et $\overrightarrow{AF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
Montrer que les droites (DE) et (CF) sont perpendiculaires :

a) Par un calcul vectoriel

b) En se plaçant dans un repère (on pourra montrer pour commencer que $AF = AD$).



Exercice 19 $ABCD$ est un rectangle dans lequel on place les points E et F sur le segment $[CD]$ tels que $DE = FC = BC$.
Montrer que les droites (DE) et (CF) sont perpendiculaires.



Exercice 20 On considère, dans un RON, les points $A(-4; -2)$, $B(2; -3)$ et $C(1; 4)$.
Parmi les points suivants : $D(0; -2)$, $E\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$, $F(2; 7)$, quels sont ceux qui appartiennent à la hauteur issue de C dans le triangle ABC ?

Exercice 21 On considère le point $A(1; 3)$ et la droite d d'équation $y = 2x - 1$. On note de plus H le projeté orthogonal de A sur la droite d.

a) Faire une figure.

b) Donner les coordonées de 2 points de la droite d. En déduire un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.

c) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$?
En exprimant de plus que $H \in d$, calculer alors les coordonnées de H.

d) Calculer la distance de A à la droite d.

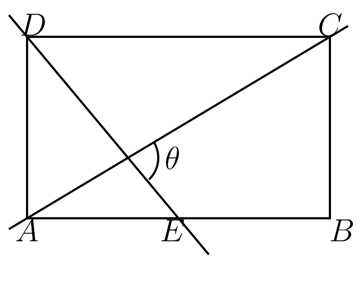
Exercice 22 Soit ABC un triangle avec $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 22°$
Déterminer toutes les longueurs et les angles de ce triangle.

Exercice 23 $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
2. Déterminer une valeur approchée des mesures des angles $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Exercice 24 $ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$. E est le milieu de $[AB]$.

1. Calculer les longueurs AC et DE.
2. En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}$.
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC}\right)$ à 10^{-2} degré près.
4. Introduire un RON, donner les coordonnées des points A, C, D et E et calculer une valeur de l'angle θ.



Exercice 25

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de côtés respectifs 6 cm et 4 cm.
O est le milieu de $[GD]$.
Les droites (OA) et (EB) sont-elles perpendiculaires ?