Trinôme du second degré

Première générale
spécialité maths

Table des matières

I - Révisions

Exercice 1 Développer et réduire les expressions : $A(x) = 2x - 3(3x - 5)$ $B(x) = 2x(x - 3) - 4(x + 2)$
$C(x) = (2x - 4)(2x + 5)$ $D(x) = (2x - 3)^2$ $E(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$ $F(x) = (2x - 3)(2x + 3)$

Exercice 2 Vrai ou faux ? (en justifiant bien sûr...)

a) 2 est solution de l'équation $-x^2+3x-2 = 0$ b) -3 est solution de l'équation $x^2-2x+15 = 0$
c) Si $x = 3$, $x^2 + 9x = (x + 3)^2$ d) Pour tout réel x, $x^2 + 9x = (x + 3)^2$
e)Si $2x^2 = 8$ alors $x = 2$

Exercice 3 Simplifier : $a = \sqrt{16}$; $b = \sqrt{8}$; $c = \sqrt{75}$; $d = \dfrac{\sqrt{12} + \sqrt{36}}{6}$; $e = \dfrac{-6 - \sqrt{27}}{3}$; $f = \dfrac{2 - \sqrt{12}}{2}$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $E_1 : x^2 = 8$; $E_2 : 2x^2 = -8$; $E_3 : (x - 1)^2 = 16$; $E_4 : (3x + 1)^2 = 5$;
$E_5 : (2x+1)(-3x+5) = 0$; $E_6 : (2x+3)^2 - 25 = 0$; $E_7 : 3(x+2)^2 - 9 = 0$; $E_8 : x^2+6x = 0$; $E_9 : 3x^2 = 7x$

II - Résolution de l'équation du second degré

1) Définition générale et premiers exemples

Définition *Une équation du second degré, à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, et c sont trois nombres réels donnés, et $a \neq 0$.*

$P(x) = ax^2 + bx + c$ est une fonction polynôme, ou trinôme, du second degré.

Résoudre l'équation $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$, c'est trouver tous les nombres réels x tels que $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Un tel nombre est dit solution de l'équation $P(x) = 0$ ou encore ***racine*** *du polynôme $P(x)$.*

Exemple : $P(x) = 3x^2 - 2x + 4$ est un trinôme du second degré, avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = 4$.
$Q(x) = -x^2 + 16$ est un trinôme du second degré, avec $a = -1$, $b = 0$ et $c = 16$.

Exercice 5 Pour chaque équation, identifier les coefficients a, b et c puis la résoudre : $E_1 : x^2 - 9 = 0$;
$E_2 : 2x^2 + 3x = 0$; $E_3 : (x + 3)^2 - 4 = 0$; $E_4 : -3(x - 1)(x + 2) = 0$; $E_5 : 2x^2 + 3 = 0$

2) Forme canonique

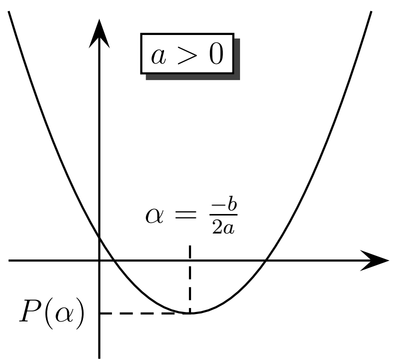
Exercice 6

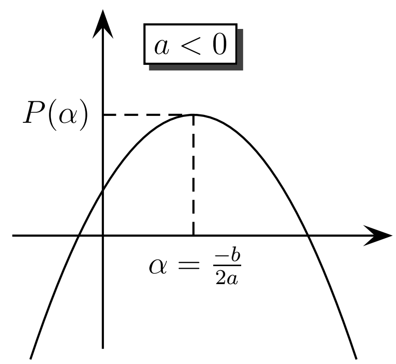
- Résolution de $(E_1) : x^2 + 2x - 8 = 0$.
  Compléter : $x^2 + 2x = (x + \dots)^2 + \dots$, puis résoudre (E_1).
- Résolution de $(E_2) : x^2 + 4x + 5 = 0$.
  Compléter : $x^2 + 4x + 5 = (x + \dots)^2 + \dots$, puis résoudre (E_2).
- Résolution de $(E_3) : 2x^2 - x - 3 = 0$.
  Compléter : $2x^2 - x - 3 = 2\Big[\ \dots\ \Big] = 2\Big[(x + \dots)^2 + \ \dots\ \Big]$, puis résoudre (E_3).

Propriété *Toute trinôme du second degré de forme développée $P(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.*

Cette écriture s'appelle la ***forme canonique*** *du trinôme du second degré.*

Corollaire *La courbe représentative d'une fonction du second degré est une* ***parabole*** *dont le sommet se situe à l'abscisse $x = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et a pour ordonnée $P(\alpha)$.*





<u>Démonstration:</u> Dans le cas général, avec $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$, et $a \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}$$

qui est la forme canonique générale, soit

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

et

$$\beta = P(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

□

Exercice 7 Tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions trinômes :
$P(x) = x^2 + 4x + 3\,;\;\; P(x) = x^2 - 6x + 5\,;\;\; P(x) = 3x^2 + 3x + 2\,;\;\; P(x) = -2x^2 - 8x + 3$

Exercice 8

a) Écrire sous forme canonique les trinômes :
$P(x) = x^2 + 4x + 3\,;\;\; P(x) = x^2 - 6x + 5\,;\;\; P(x) = x^2 + 3x + 2\,;\;\; P(x) = x^2 - 3x + 3$

b) Résoudre alors les équations $P(x) = 0$.

3) Résolution des équations du second degré

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, et on a donc,

$$P(x) = a\left[(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

<u>Si $\Delta < 0$</u> , alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$, et donc, $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-\alpha)^2 + \left(-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$.
L'équation $P(x) = 0$ n'a donc aucune solution.

<u>Si $\Delta = 0$</u> , alors $P(x) = a\,(x-\alpha)^2$, et l'équation $P(x) = a\,(x-\alpha)^2 = 0$ admet une unique solution $x = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

<u>Si $\Delta > 0$</u> , alors $\sqrt{\Delta}$ existe et, $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, et donc, $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, et on a alors une identité remarquable :

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left[(x-\alpha)^2 - \left(\frac{\Delta}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x - \alpha - \frac{\Delta}{2a}\right)\left(x - \alpha + \frac{\Delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

C'est maintenant une équation produit nul, et qui admet alors deux solutions :

$$x - \alpha + x\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \iff x = \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et,

$$x - \alpha - x\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \iff x = \alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et dans ce cas on a alors trouvé la factorisation :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Tout repose donc sur le signe du nombre Δ :

Définition *Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le **discriminant** du trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$.*

Exercice 9 Calculer le discriminant des trinômes :

a) $P(x) = x^2 + x + 1$
b) $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$
c) $R(x) = -x^2 + 3x - 1$
d) $S(x) = -x^2 - 2x + 10$
e) $T(x) = -3x^2 - x + 2$
f) $U(x) = x^2 - 2x + 1$

Définition *On appelle **racine** du polynôme P, les solutions de l'équation $P(x)=0$.*

Théorème
- *Si $\Delta<0$, le trinôme n'a pas de racine ;*
- *Si $\Delta=0$, le trinôme a une racine "double" $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, et le trinôme se factorise suivant $P(x)=a(x-x_0)^2$.*
- *Si $\Delta>0$, le trinôme admet deux racines distinctes :*

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad \textit{et,}\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et le trinôme se factorise suivant $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$, avec :

a) $P(x)=x^2-3x+4$ b) $P(x)=3x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{49}{48}$ c) $P(x)=3x^2-x-4$

d) $P(x)=3x^2-27$ e) $P(x)=6x^2-24x$ f) $P(x)=3x^2-12+(x-2)(x+3)$

Exercice 11 Factoriser les expressions suivantes :

a) x^2-3x+2 b) $x^2-7x+10$ c) $2x^2-5x+2$ d) $-3x^2+4x+4$ e) $-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+1$

Exercice 12

1. Déterminer un trinôme du second degré admettant 2 et -5 comme racines. Quel est le signe de son discriminant ?
2. Déterminer la fonction trinôme du second degré f vérifiant : $f(2)=0$, $f(-3)=0$ et $f(1)=4$.

Exercice 13 Résoudre les équations :

a) $x^3+6x^2-7x=0$ b) $x^4-3x^2+2=0$ c) $2x^4+9x^2+4=0$ d) $x^2-\dfrac{1}{x^2}=12$

Exercice 14 Soit le polynôme $P(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction trinôme du second degré $Q(x)=ax^2+bx+c$ vérifie la relation : $P(x)=(Q(x))^2$.
2. Résoudre alors l'équation $P(x)=0$.
3. a) Trouver trois réels a, b, c tels que $x^3+6x^2+6x+5=(x+5)(ax^2+bx+c)$.
   b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle f suivante et la simplifier

$$f(x)=\frac{x^4+6x^3-11x^2-60x+100}{x^3+6x^2+6x+5}.$$

III - Inéquation du second degré

Exemple : Factoriser puis déterminer le signe du trinôme du second degré de : $P(x)=2x^2-6x+4$.

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ un trinôme du second degré, alors,

- si $\Delta < 0$, alors $P(x) = a\underbrace{\left[\underbrace{(x+\alpha)^2}_{\geqslant 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{>0}\right]}_{>0}$ est toujours du signe de a.
- si $\Delta = 0$, alors $P(x) = a\,(x-x_0)^2$ est toujours du signe de a, et $P(x) = 0$ pour $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- si $\Delta > 0$, alors $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, et (en supposant par exemple $x_1 < x_2$)

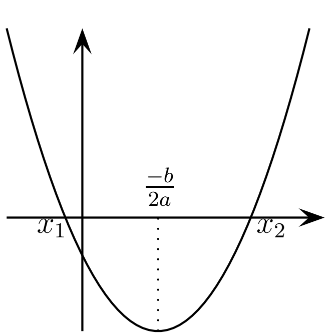
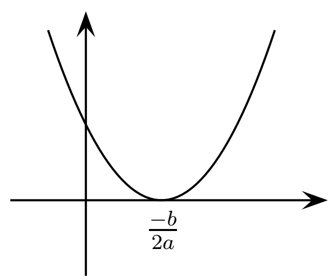
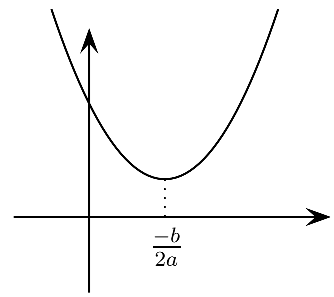
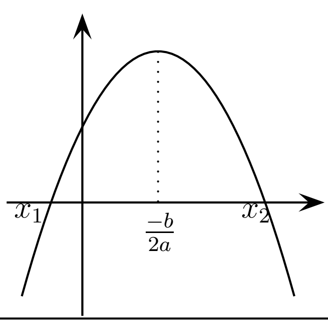
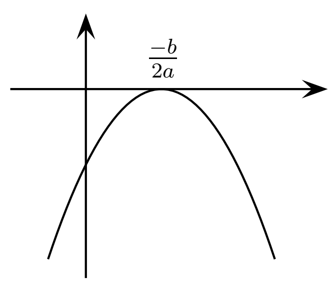
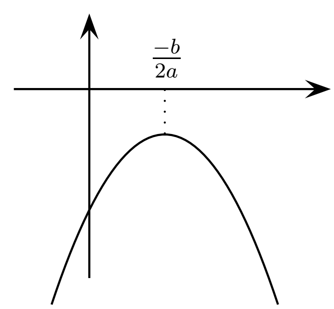
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a	|	signe de a	|	signe de a	
$x-x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Théorème *Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré avec $a \neq 0$, alors :*
- *si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours du signe de a ;*
- *si $\Delta = 0$, $P(x)$ s'annule pour $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, et pour $x \neq x_0$, $P(x)$ est du signe de a ;*
- *si $\Delta > 0$, $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2, et $P(x)$ est du signe de a "à l'extérieur des racines" et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.*

Trinôme du second degré : synthèse

Pour un trinôme du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois réels, et $a \neq 0$.

Le discriminant du trinôme est $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f)	2 solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	une solution unique (double) : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	pas de solution
Factorisation de $f(x)$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	pas de factorisation
Courbe représentative de f, si $a > 0$			
Courbe représentative de f, si $a < 0$			
Signe de $f(x)$	x : $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$ f : Signe de a ; 0 ; Signe de -a ; 0 ; Signe de a	x : $-\infty$; x_0 ; $+\infty$ f : Signe de a ; 0 ; Signe de a	x : $-\infty$; $+\infty$ f : Signe de a

Exercice 15 Déterminer le signe de $P(x)$ où,
a) $P(x) = x^2 + 4x - 5$ b) $P(x) = -x^2 + x + 6$ c) $P(x) = 3 - 2x + x^2$ d) $P(x) = -x^2 + x\sqrt{2} - 1$

Exercice 16 Résoudre les inéquations :
a) $x^2 + 4x - 4 \leqslant 0$ b) $-x^2 + x + 6 > 0$ c) $-2x^2 + x + 1 < 0$
d) $2x^2 - 24x + 12 < -60$ e) $29x \geqslant x^2 - 96$ f) $m^2 + m - 20 \leqslant 0$

Exercice 17 Déterminer le réel m pour que le trinôme $f(x) = -x^2 + 2x - m$ soit négatif pour tout x.

Exercice 18 Dresser le tableau de signe des expressions suivantes : a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{2x + 1}$

b) $g(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x}$ c) $h(x) = x - \dfrac{1}{x}$ d) $k(x) = 1 - \dfrac{2}{2x^2 - 4x + 5}$ e) $l(x) = -2x^3 + 3x^2 - x$

Exercice 19 Soit m un nombre réel, et f la fonction trinôme définie par $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ admet-elle une seule racine ? Calculer alors cette racine.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ admet-elle deux racines distinctes ?
3. Quel est l'ensemble des réels m pour lesquels $f(x) < 0$ pour tout réel x ?

Exercice 20 Dans cet exercice, $f(x)$ désigne le trinôme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant les réponses :

1. Si pour tout réel x, $f(x) < 0$, alors $\Delta < 0$.
2. S'il existe deux réels α et β tels que $f(\alpha)f(\beta) < 0$, alors $\Delta \geq 0$.
3. Si $\Delta < 0$, alors pour tout réel x, $f(x) < 0$.
4. Si $\Delta > 0$ et si α et β sont deux réels tels que $x' < \alpha < x'' < \beta$ (x' et x'' étant les racines du polynôme), alors $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

IV - Relation entre les coefficients du trinôme et les racines

Dans le cas $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2, et se factorise alors suivant :

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

et donc, en développant,

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \end{aligned}$$

En identifiant alors les coefficients des deux expressions développées, on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a(x_1 + x_2) &=& b \\ ax_1x_2 &=& c \end{array} \right. \text{ soit, } \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 &=& \dfrac{c}{a} \end{array} \right.$$

Propriété *Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors on a les relations :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array} \right.$$

Réciproquement, deux nombres x_1 et x_2 tels que $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$ sont solutions de l'équation du second degré : $x^2 - Sx + P = 0$.

Exercice 21 Pour chacun des trinômes suivants, rechercher une racine évidente puis calculer la deuxième racine. Vérifier les résultats à l'aide du calcul du discriminant.

a) $P(x) = x^2 + 4x - 5$ b) $Q(x) = x^2 + 7x + 6$ c) $R(x) = -x^2 + x + 6$ d) $S(x) = x^2 + x\sqrt{2} - 4$

Exercice 22 Donner deux nombres réels dont la somme vaut 12 et le produit 35.

Exercice 23 Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre $50m$ et d'aire $114m^2$?

V - Polynômes

Définition
- *Un* **monôme** *est une expression algébrique de la forme ax^n, où a est réel et n un entier naturel.*
- *Un* **polynôme** *est une somme de monôme, c'est-à-dire une expression de la forme :*

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + dx^2 + ex + f$$

- *Un* ***trinôme*** *est une somme de* ***trois*** *monômes : $ax^2 + bx + c$.*
- *Un* ***binôme*** *est une somme de* ***deux*** *monômes : $ax + b$. C'est aussi une expression affine.*

Exemple : $P(x) = 5x^7 + 4x^6 + 3x^2 - 2\,;\quad Q(x) = \dfrac{3}{2}x^{17} - \sqrt{3}x^{12} + 17x^5 - 1,45x^4 + 2x - \dfrac{3}{\sqrt{2}}x + 3$

Définition *On dit que deux polynômes P et Q sont égaux, noté $P = Q$, si pour tout réel x, on a $P(x) = Q(x)$.*

Propriété *(admise) Deux polynômes sont égaux si et seulement si leur coefficient respectif de chaque monôme de même degré sont égaux.*

Exemple : Soit $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2$ et $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors,

$$P = Q \iff \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -2 \end{cases}$$

Si un polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(x) = (x - a)Q(x)$, on dit que P se factorise par $x - a$.
Dans ce cas, on a facilement que $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$, c'est-à-dire que a est une racine de P.
La récirpoque est aussi vraie :

Théorème *(admis) Un polynôme P admet le réel a comme racine si et seulement si P se factyorise par $x - a$, c'est-à-dire si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$ pour tout x.*

Exemple : Soit $P(x) = x^3 - 7x^2 + x + 18$. Calculer $P(2)$ et en déduire une factorisation de P. Déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 24 Soit $P(x) = 6x^3 - x^2 - 4x + 3$. Calculer $P(-1)$ et en déduire une factorisation de $P(x)$ puis toutes les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 25 Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$. Calculer $P(1)$ et $P(2)$ puis factoriser $P(x)$. Déterminer alors le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.