DM de Noël

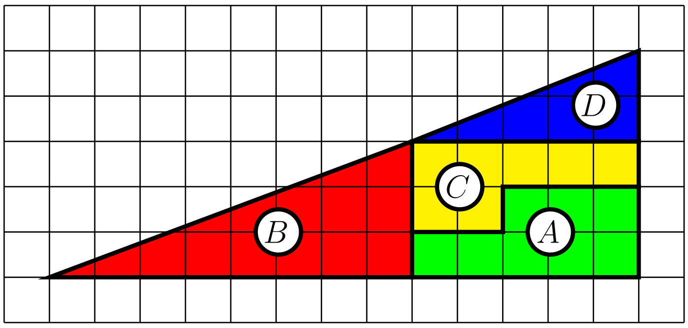
Chercher l'erreur, calcul, logique ou raisonnement

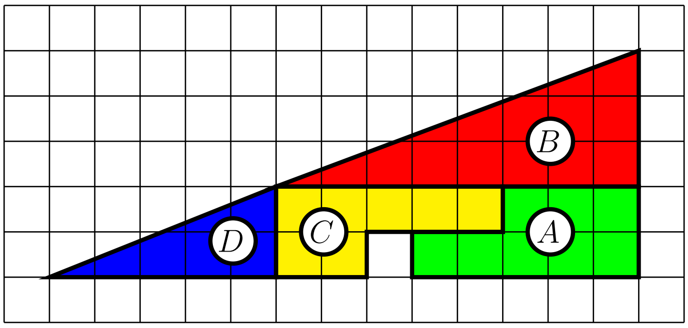
Exercice 1 Peut-on vraiment faire confiance à un dessin ?

Pour les deux figures ci-dessous, de la figure du dessus à celle du dessous, on a simplement déplacé les trois figures géométriques B, C et D.

Aurait-on ainsi un carré supplémentaire, le carré blanc ?

Chercher (et démontrer) l'erreur ! *(avec les connaissances mathématiques du lycée !)*





Rermarque : tous les sommets de ces polygones, dans les deux figures, sont exactement à une intersection du quadrillage.

Exercice 2 Un résultat qui pourrait remettre beaucoup de choses en cause ...

Soit a et b deux nombres réels égaux à 1, c'est-à-dire que $a = b = 1$.

On alors, en multipliant par a de chaque côté,

$$a^2 = ab$$

puis, en soustrayant b^2 de chaque côté,

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

On reconnaît alors une identité remarquable à gauche :

$$(a - b)(a + b) = ab - b^2$$

et, à droite, on peut factoriser par b, pour obtenir

$$(a - b)(a + b) = (a - b)b$$

Enfin, en divisant de chaque côté par le terme commun $(a - b)$, on obtient l'égalité

$$a + b = b$$

Maintenant, comme on l'a annoncé au début, avec $a = b = 1$, alors $a + b = 1 + 1 = 2$ et $b = 1$ et on a donc obtenu l'égalité remarquable

$$\boxed{2 = 1}$$

À partir de là, beaucoup de résultats sont enfin accessibles :
- en soustrayant 1 de chaque côté, on obtient alors $1 = 0$
- en élevant au carré : $2^2 = 1^2$, soit $4 = 1$
- en élevant au cube : $2^3 = 1^3$, soit $8 = 1$
- ...

Chercher (et démontrer) l'erreur !

Exercice 3 **Un autre résultat qui, confirme le précédent ...**
On s'intéresser à l'équation $E : x^2 + x + 1 = 0$.
Soit x une solution de cette équation.

Cette équation est équivalente à $E_2 : x^2 + x = -1$.

Aussi, en multipliant par x tous les termes de l'équation E, on obtient l'équation $E_3 : x^3+x^2+x = 0$, et donc, en substituant $x^2 + x$ grâce à l'équation E_2, on obtient

$$\begin{aligned} & x^3 + \underbrace{x^2 + x}_{=-1} = 0 \\ \iff & x^3 - 1 = 0 \\ \iff & x^3 = 1 \end{aligned}$$

Maintenant cette équation admet une unique solution $x = 1$ (car $f : x \mapsto x^3$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et d'après le théorème de la bijection).

On a donc trouvé une unique solution de l'équation E, en particulier, on a donc, dans l'équation E justement

$$1^2 + 1 + 1 = 0 \iff \boxed{3 = 0}$$

Chercher l'erreur ...

Exercice 4 On dispose de 3 lettres : P, I et O. On appelle *proposition* toute combinaison (ou chaîne) formée avec ces lettres. Par exemple, PIO, POI, PIPO ou encore POIOIOIIII sont des propositions.
Bien sûr, toutes les propositions ne sont pas forcément vraies ...
Bien sûr aussi, l'ordre des lettres dans une proposition compte.

Pour former (c'est-à-dire démontrer) une proposition, on a à notre disposition :

un axiome : **PI** *(un axiome est une proposition admise comme vraie)*
et **quatre règles** :

(1) si une chaîne se termine par I, on peut lui ajouter un O en fin.
Par exemple, PIOOI donne PIOOIO.

(2) d'une chaîne de type Px (où x est une chaîne quelconque), on peut faire une chaîne Pxx.
Par exemple, POP donne POPOP, et PIOOI donne PIOOIIOOI.

(3) si, dans une chaîne, on trouve trois I de suite, on a le droit de les remplacer par un O.
Par exemple, POIIIOI donne POOOI, et OPIIIPO donne OPOPO.

(4) si, dans une chaîne, on trouve deux O de suite, on a le droit de les abandonner.
Par exemple, IOOO donne IO.

Pouvez-vous (dé)montrer (dans n'importe quel ordre) :
- Le corollaire (5) : si dans une chaîne on a six I de suite, on peut les abondonner.
- Le corollaire (6) : on peut abondonner les trois derniers I d'une chaîne.
- La proposition PIOIOIOI.
- La proposition PIOIOIO.
- La proposition PO.
- La "célèbre (?)" proposition PIPO.