Corrigé du devoir de mathématiques

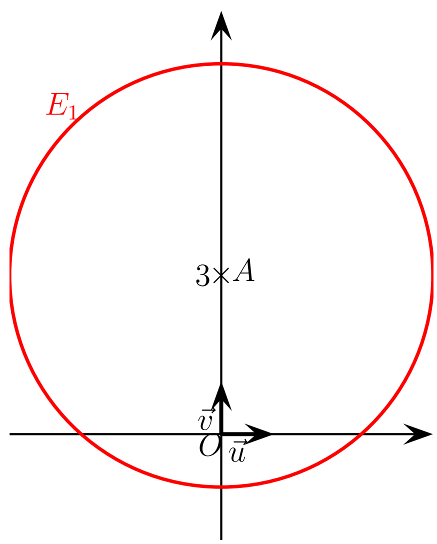
Exercice 1 On cherche le reste de $a = 2023^{2023}$ dans la division euclidienne par 10.
On a $2023 \equiv 3[10]$ et donc $a \equiv 3^{2023}[10]$.
Ensuite, on a $3^2 = 9 \equiv -1[10]$, d'où

$$\begin{aligned} a &= 3^{1011\times 2+1} \\ &= \left(3^2\right)^{1011} \times 3 \\ &\equiv (-1)^{1011} \times 3[10] \\ &\equiv -3[10] \equiv 7[10] \end{aligned}$$

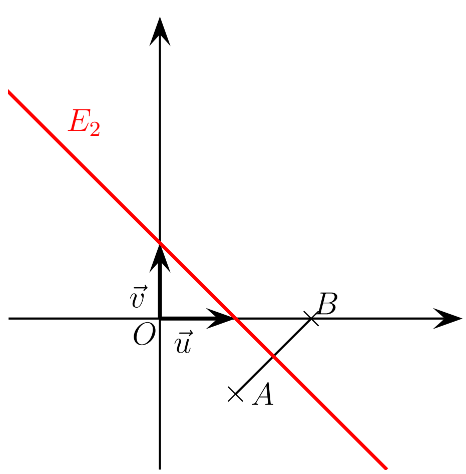
Le reste est donc 7.

Exercice 2

a) Soit $M(z)$ et $A(3i)$ alors on a $M \in E_1 \iff |z-3i| = 4 \iff AM = 4$.
E_1 est donc le cercle de entre A et de rayon 3.

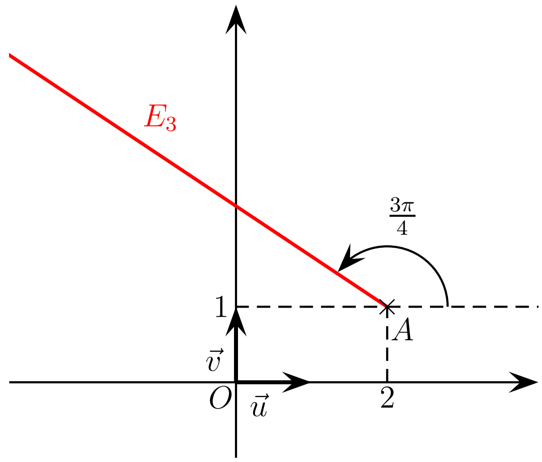


b) Soit $M(z)$ et $A(1-i)$ et $B(2)$ alors on a $M \in E_2 \iff |z-(1-i)| = |z-1| \iff AM = BM$.
E_2 est donc la médiatrice du segment $[AB]$.



c) Soit $M(z)$ et $A(2+i)$ alors on a $M \in E_3 \iff \arg(z-2-i) = \dfrac{3\pi}{4} \iff \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

E_3 est donc la demi-droite suivante



Exercice 3 Soit $z = 2 - 2i$, alors $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\theta = \arg(z)$ est tel que $\cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit l'argument $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et donc la forme exponentielle $z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

On en déduit que $z_n = z^n = (2\sqrt{2})^n e^{-in\frac{\pi}{4}}$ et donc que z_n est un imaginaire pour lorsque, pour un entier $k \in \mathbb{Z}$,

$$n\frac{\pi}{4} = k\pi \iff n = 4k$$

c'est-à-dire lorsque n est un multiple de 4.

Exercice 4 *(Baccalauréat France métropolitaine, Septembre 2007)*

1. On a $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 + 2i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)\right]$.
2. — $|z_1|^2 = 2 + 6 = 8 \Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$. On a donc $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Donc $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
   — On a de même $|z_2| = 2\sqrt{2}$, puis $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.
   — Il suit $\arg(Z) = \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12} \quad [2\pi]$. et $|Z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = 1$.
3. On en déduit que $Z = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et par identification avec la forme algébrique du 1) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$