Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

1.
$$\begin{aligned} z_1 &= 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= 4\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ &= 4 - 4i \end{aligned}$$

2. On a le module $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ et alors l'argument $\theta_2 = \arg(z_2)$ tel que $\cos\theta_2 = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{3}$.
   On a alors
$$z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

3. On a
$$(1+i\sqrt{3})^6 = \overline{z_2}^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 2^6e^{i2\pi} = 64$$

4. Sous forme exponentielle, on a
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$
   Sous forme algébrique
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-4i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(4-4i)(1+i\sqrt{3})}{4} = 1+\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})$$

Exercice 2

1.
$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\left(\sqrt{3}+1\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3}+1\right)^2 - \left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 2i\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) \\ &= 4\sqrt{3}+4i \end{aligned}$$

2. On a donc, $|z^2| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = 8$ et $\arg(z^2) = \theta$ avec $\cos\theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, d'où $\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Comme $|z^2| = |z|^2 = 8$, on en déduit que $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   De plus, $\arg(z^2) = 2\arg(z) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et ainsi, $\arg(z) = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$, d'où $\arg(z) = \dfrac{\pi}{12}$ ou $\arg(z) = \dfrac{\pi}{12} - \pi = -\dfrac{11\pi}{12}$.
   Comme la partie réelle de z est positive $\left(\Re e(z) = \sqrt{3}+1\right)$, on a nécessairement $\arg(z) = \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 3 Soit n un entier naturel. On écrit $n = 10a + b$ avec a et b deux entiers naturels et $b \leqslant 9$.

a) Supposons $n = 10a + b \equiv 0\,[19]$, alors, en multipliant par 2, $2n = 20a + 2b \equiv 0[19]$.
Or $20 \equiv 1[19]$, d'où on déduit que $a + 2b \equiv 0[19]$.

Réciproquement, si $a+2b \equiv 0[19]$, alors en multipliant par 10, on a aussi $10a+20b \equiv 0[19]$ et, comme $20 \equiv 1[19]$, on en déduit que $10a + b \equiv 0[19]$ et donc bien que $n \equiv 0[19]$.

b) On utilise le résultat de la question a).

On a $448 = 10 \times 44 + 8$, donc avec les notations précédentes, $a = 44$ et $b = 8$.
On a alors $a + 2b = 60$ qui n'est pas divisible par 19, et donc $n = 448$ non plus.

Pour $n = 6859 = 10 \times 685 + 9$, on a $a + 2b = 685 + 2 \times 9 = 703$. Pour savoir si ce nombre est divisble par 19, on procède de même à nouveau : $703 = 10 \times 70 + 3$ avec $70 + 2 \times 3 = 76$ qui est divisible par 19 car $79 = 4 \times 19$, donc 703 est aussi divisible par 19, et donc 6859 aussi.