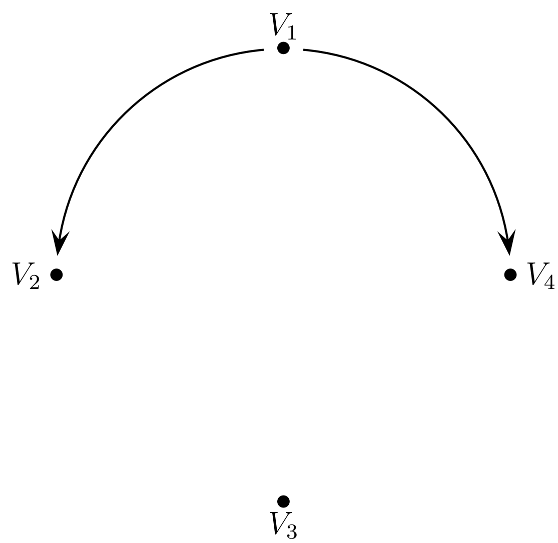
Devoir de mathématiques

Terminale générale
Maths expertes

Exercice 1 On considère quatre villes V_1, V_2 , V_3 et V_4 et le traffic aérien qui permet de relier ces quatre villes : il existe seulement des vols directs

— de V_1 vers V_2 et de V_1 vers V_4,
— de V_2 vers V_3,
— de V_3 vers V_1 et de V_3 vers V_4,
— de V_4 vers V_2

a) Recopier et compléter le graphe suivant.



b) Écrire la matrice M associée à ce graphe, en prenant les villes dans leur ordre de numération.

c) Donner les matrices M^2, M^3 et $M + M^2 + M^3$.

d) Combien de vols comportant au plus deux escales permettent de relier V_2 à V_4 ?

e) Existe t-il au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j comportant au plus deux escales ? Pourquoi ?

Exercice 2 On considère une chaîne de Markov (X_n) dans l'espace des états $\Omega = \{e_1; e_2\}$, dont la matrice A de transition associée est

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

On note π_n la distribution des états à l'étape n. Initialement $\pi_0 = (0,2 \quad 0,8)$.

a) Déterminer π_1, π_2 et π_{10}.

b) Déterminer les éventuels états stables (ou distributions invariantes).

Exercice 3 Deux compartiments, A et B, contiennent un gaz. Ces deux compartiments sont reliés entre eux, et le gaz peut donc librement passer d'un compartiment à l'autre.
Initialement le compartement A contient 10% du gaz et les 90% restants sont dans le compartiment B. À chaque seconde, 40% du gaz présent dans le compartiment A passe dans le compartiment B, et de même 40% du gaz dans le compartiment B passe dans le A. On note alors $\pi_n = (p_A \quad p_B)$ la répartition du gaz respectivement dans les compartiments A et B, au bout de n secondes.

1. Représenter l'évolution de la proportion de gaz entre les deux compartiments par un graphe pondéré.
2. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

   Donner la répartition du gaz au bout 1 seconde, puis au bout de 10 secondes.
3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que cette matrice est inversible, puis que son inverse est $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer les nombres réels x et y dans la matrice $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ tel qu'on ait
$$M = PDP^{-1}$$
5. Calculer D^2 et donner, pour tout entier n, la matrice D^n.
6. Établir à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier n non nul, $M^n = PD^nP^{-1}$.
7. Déterminer la limite L de la matrice D^n lorsque $n \to +\infty$. En déduire la distribution limite π de la suite des distributions (π_n).