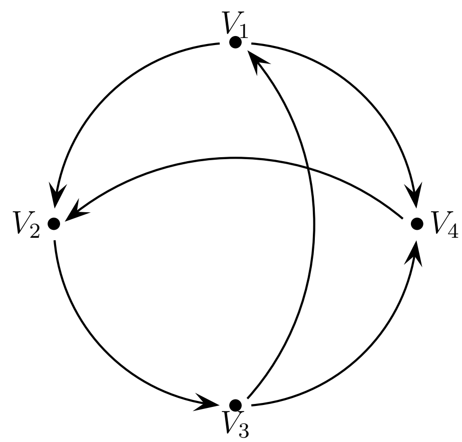
Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

a)



b) La matrice associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a ensuite $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. et $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. et donc $M+M^2+M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) La matrice d'adjacence M contient les vols directs entre les villes, M^2 contient les nombres de vols avec exactement une escale, et M^3 les nombres de vols avec exactement 2 escales.
On trouve ainsi, dans la matrice $M+M^2+M^3$ qu'il y a 2 vols avec au plus deux escales qui permette de relier V_2 à V_4.

d) Comme la matrice $M+M^2+M^3$ ne contient aucun zéro, toute ville V_i peut être reliée à chaque ville V_j avec au plus deux escales.

Exercice 2

a)

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_0 A \\ &= (0,2 \quad 0,8) \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \\ &= (0,34 \quad 0,66) \end{aligned}$$

puis, éventuellement à l'aide d'une calculatrice

$$\pi_2 = \pi_1 A = (0,298 \quad 0,702)$$

puis

$$\pi_{10} = \pi_0 A^{10} \simeq (0,3077 \quad 0,6923)$$

b) Un dstribution stable, ou invariante, est $\pi = (x \quad y)$ avec $x+y=1$ et

$$\pi A = \pi \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 0,1x &+& 0,4y &=& x \\ 0,9x &+& 0,6y &=& y \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -0,9x &+& 0,4y &=& 0 \\ 0,9x &-& 0,4y &=& 0 \end{array} \right.$$

Ces deux équations sont équivalentes (l'opposée l'une de l'autre), et équivalente à

$$x = \frac{0,4}{0,9} y = \frac{4}{9} y$$

Comme de plus $x+y=1$, on a donc

$$x+y=\frac{4}{9}y+y=\frac{13}{9}y=1 \iff y=\frac{9}{13}$$

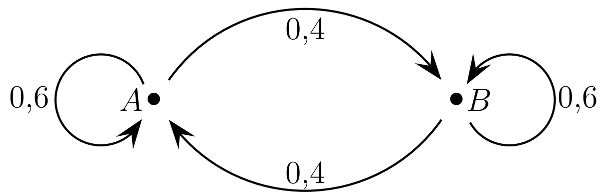
On trouve alors aussi

$$x+y=1 \iff x=1-y=\frac{4}{13}$$

La seule distribution invariante est donc $\pi=\begin{pmatrix}\frac{4}{13} & \frac{9}{13}\end{pmatrix}$

Exercice 3

1.



2. On a $\pi_0=(0,1 \quad 0,9)$ et au bout de 1s,

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \pi_0 M\\ &= (0,1 \quad 0,9)\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}\\ &\simeq (0,42 \quad 0,58)\end{aligned}$$

Au bout de 10 secondes, la distribution est

$$\pi_{10}=\pi_0 M^{10}\simeq(0,5 \quad 0,5)$$

à 10^{-8} près.

3. $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.
On a $\det(P)=1\times1-(-1)\times1=2\neq0$, ce qui montre que cette matrice est inversible.
Ensuite, on calcule de $PP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$, ce qui montre que cette matrice P^{-1} est bien la matrice inverse de P.

4. On calcule

$$\begin{aligned}PDP^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y\\ -x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y & -x+y\\ -x+y & x+y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir $M=PDP^{-1}$, on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{rcl}\frac{1}{2}(\ x+y) &=& 0,6\\ \frac{1}{2}(-x+y) &=& 0,4\end{array}\right.$$

soit encore

$$\begin{cases} x + y = 1,2 \\ -x + y = 0,8 \end{cases}$$

et donc, en ajoutant les deux équations, on obtient $2y = 2$ soit $y = 1$ et de même, en les soustrayant, on obtient $2x = 0,4$ soit $x = 0,2$

On trouve donc la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. On calcule facilement $D^2 = \begin{pmatrix} 0,2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et plus généralement, $D^n = \begin{pmatrix} 0,2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

6. Initialisation : pour $n = 1$, on a $M^1 = PD^1P^{-1}$ d'après le calcul de la question précédente.

   Hérédité : Supposons que, pour un entier $n \geqslant 1$ on ait $M^n = PD^nP^{-1}$,
   alors,
$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n M \\ &= PD^nP^{-1}M \end{aligned}$$
   or on sait que $M = PDP^{-1}$, d'où
$$\begin{aligned} M^n &= PD^n \underbrace{P^{-1}P}_{=I_2} DP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
   ce qui montre que la formule est encore vraie au rang $n + 1$.

   Conclusion : on vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n non nul, $M^n = PD^nP^{-1}$.

7. Comme $-1 < 0,2 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^n = 0$ et alors,
$$\lim_{n\to+\infty} D^n = L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Comme
$$\pi_n = \pi_0 M^n = \pi_0 PD^nP^{-1}$$
   on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} \pi_n = \pi_0 PLP^{-1}$$
   Il reste à faire les produits matriciels, et on trouve que
$$\pi_0 PLP^{-1} = (0,5 \quad 0,5)$$
   d'où la limite
$$\lim_{n\to+\infty} \pi_n = (0,5 \quad 0,5)$$
   Après un temps assez long, le gaz s'équilibre exactement entre les deux compartiments : 50% dans chaque compartiment.