Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

1. $67 \equiv 2[5]$ donc $67^{89} \equiv 2^{89}[5]$. De plus, $2^2 = 4 \equiv -1[5]$ d'où

$$2^{89} = \left(2^2\right)^4 4 \times 2 \equiv (-1)^{44} \times 2[5] \equiv 2[5]$$

   Ainsi, on a trouvé que

$$67^{89} \equiv 2[5]$$

   et le reste est donc 2.

2. On a $16 \equiv -1[17]$ et $18 \equiv 1[17]$, donc, par puissances et somme,

$$16^{2n+1} + 18^n \equiv (-1)^{2n+1} + 1^n[17] \equiv -1 + 1[17] \equiv 0[17]$$

   Ainsi ce nombre est divisible par 17.

3. On remplit un tableau de congruences :

$n\,[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2\,[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$2n\,[7]$	0	2	4	6	1	3	5
$n^2 - 2n\,[7]$	0	-1	0	-4	1	1	-4

   On trouve donc que $n^2 - 2n$ est divisible par 7 si et seulement si $n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 2[7]$, c'est-à-dire si n est divisible par 7 ou $n - 2$ est divisible par 7.

Exercice 2 On considère le polynôme $P(z) = z^3 + z^2 - 2$

a) On a directement que $P(1) = 1^3 + 1^1 - 2 = 0$ et donc que 1 est bien une racine de P qui se factorise alors selon

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-1)(az^2 + bz + c) \\ &= az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c \end{aligned}$$

On identifie alors avec les coefficients de P :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = 0 \\ -c = -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

d'où la factorisation : $P(z) = z^3 + z^2 - 2 = (z-1)(z^2 + 2z + 2)$

b) On peut alors trouver toutes les racines de P :

$$P(z) = 0 \iff \left\{\begin{array}{ll} & z - 1 = 0 \\ \text{ou} & z^2 + 2z + 2 = 0 \end{array}\right.$$

L'équation du 2nd degré a pour discriminant $\Delta = -4 < 0$ et admet donc deux racines compelxes conjuguées $z = \dfrac{-2 - i\sqrt{4}}{2} = -1 - i$ et $z = -1 + i$.

On a finalement les trois racines de P : $\Big\{1;\ -1 - i;\ -1 + i\Big\}$.

Exercice 3 Soit $P(z) = z^4 + 16$.

a) On pose $z = x + iy$ avec x et y deux réels. On a alors

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 4i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

La première équation donne $x = y$ ou $x = -y$.
$x = -y$ est impossible dans la deuxième équation qui deviendrait $-2x^2 = 4 \iff x^2 = -2 < 0$.
On a donc nécessairement $x = y$, et alors, avec la deuxième équation $2xy = 2x^2 = 4 \iff x^2 = 2$ d'où $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.
On trouve donc finalement deux solutions : $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2}(1+i)$ et $z = -\sqrt{2}(1+i)$

b) On a $P(z) = (z^2)^2 - (4i)^2 = (z^2 - 4i)(z^2 + 4i)$
On trouve alors les racines de P :

$$P(z) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rl} & z^2 = 4i \\ \text{ou} & z^2 = -4i \end{array} \right.$$

On trouve donc les deux nombres complexes de la questions précédentes et, en reprenant les mêmes dans lesquels on a cette fois $x = -y$ et $2xy = -2x^2 = -4 \iff x^2 = 2$, on trouve quatre racines

$$\left\{ \sqrt{2}(1+i); -\sqrt{2}(1+i); \sqrt{2}(1-i); \sqrt{2}(-1+i) \right\}$$