Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 On pose $z=x+iy$, avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, et alors l'équation $z^2-2i\bar{z}=2$ est équivalente à

$$z^2-2i\bar{z}=\left(x^2-y^2-2y\right)+i\left(2xy-2x\right)$$

et donc, en identifiant les parties réelles et imaginaires, l'équation est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2-2y &=& 2 \\ 2xy-2x &=& 0\end{array}\right.$$

La 2ème équation donne

$$2xy-2x=2x(y-1)=0$$

soit $x=0$ ou $y=1$.
Si $x=0$, la 1ère équation du système devient

$$-y^2-2y=2 \iff y^2+2y+2=0$$

qui est une équation du second degré de discriminant $\Delta=-4<0$ et qui n'admet donc pas de solution réelle.
Si $y=1$, alors la 1ère équation du système devient

$$x^2=5 \iff x=\pm\sqrt{5}$$

L'équation de départ admet donc deux solutions : $z=-\sqrt{5}+i$ et $z=\sqrt{5}+i$.

Exercice 2 On considère le polynôme $P(z)=z^3-z^2-z-2$

a) On calcule $P(2)=2^3-2^4-2-2=0$, ce qui montre que 2 est bien une racine de P.
On en déduit que P se factorise suivant

$$P(z)=(z-2)Q(z)=(z-2)(az^2+bz+c)$$

soit, en développant

$$P(z)=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$$

puis, en identifiant avec les coefficients du polynôme P,

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b-2a=-1 \\ c-2b=-1 \\ -2c=-2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=1\end{array}\right.$$

et on trouve donc la factorisation $P(z)=(z-2)(z^2+z+1)$

b) On a $P(z)=0$ si et seulement si $z-2=0 \iff z=2$ ou $z^2+z+1=0$.
Cette dernière équation du second degré a pour disriminant $\Delta=-3<0$ et admet deux racines complexes :
$z_1=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
Ainsi, l'équation $P(z)=0$ admet trois solutions dans $\mathbb{C}$: $\mathcal{S}=\left\{2;\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

Exercice 3 On donne la relation suivante : $26 \times 51 + 32 = 1358$.

a) La division euclidienne est directement écrite : le quotient est 26 et le reste est 32.

b) Dans la relation donnée, on a $32 > 26$ et donc ce n'est pas directement la division euvlidienne par 26. On modifie donc cette relation :

$$1358 = 26 \times 51 + 32 = 26 \times 52 - 26 + 32 = 26 \times 52 + 6$$

Ainsi, le quotient est 52 et le reste est 6.

Exercice 4 Soit $n = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$$

Donc, $n^2 - 1$ est déjà multiple de 4.
Mais comme k est un entier, soit k, soit l'entier suivant $k+1$ est pair, et donc le produit $k(k+1)$ est forcément pair, d'où $k(k+1) = 2p$ pour un certain entier p.
Finalement, on donc que

$$n^2 - 1 = 4 \times 2p = 8p$$

est bien divisible par 8.