Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

$z_1 = \dfrac{1+3i}{3+i} \times \dfrac{3-i}{3-i} = \dfrac{6+8i}{10} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$

$z_2 = \dfrac{2}{2-i} + \dfrac{i}{2+i} = \dfrac{2(2+i)+i(2-i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{5+4i}{5} = 1 + \dfrac{4}{5}i$

$z_3 = \left(\dfrac{2}{1-i}\right)^2 = \dfrac{4}{(1-i)^2} = \dfrac{4}{-2i} = \dfrac{4i}{2} = 2i$

Exercice 2

$E_1 : iz + 1 - 4i = 2 \iff z = \dfrac{1+4i}{i} = 4 - i$

$E_2 : 2z + 2 - i = iz + 5 \iff z = \dfrac{3+i}{2-i} = \dfrac{3+i}{2-i} \times \dfrac{2+i}{2+i} = \dfrac{5+5i}{5} = 1 + i$

$E_3 : z - 2i\overline{z} = 5 - i$. On pose $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, et alors

$E_3 \iff (x+iy) - 2i(x-iy) = 5 - i \iff (x-2y) + i(y-2x) = 5 - i \iff \left\{\begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ y - 2x = -1 \end{array}\right.$

La 1ère équation se réécrit $x = 2y + 5$ et dans la 2ème équation

$$y = 2x - 1 = 2(2y+5) - 1 \iff -3y = 9 \iff y = -3$$

et alors $x = 2y + 5 = -1$ d'où la solution de l'équation $z = -1 - 3i$.

$E_4 : z^2 + 2z + 5 = 0$ est une équation du 2nd degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$ et admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-2 - i\sqrt{16}}{2} = -1 - 2i$ et $z_2 = -1 + 2i$.