Devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de dimension 2×4 telle que $a_{i,j} = 2ij$.
Écrire la matrice A et sa transposée A^T.

Exercice 2 Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$.
Montrer que $B^2 = 3B$ (détailler les calculs), puis en déduire B^3.
Donner alors B^k pour tout entier k non nul (démontrer la formule, bien sûr).

Exercice 3 Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Calculer C^2. Que peut-on alors dire de la matrice C ?

b) Déterminer la matrice X telle que $CX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 4 Soit le système $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ 3x & + & 2y & = & 12 \end{array} \right.$
Écrire ce système sous forme matricielle $AX = B$, en précisant les matrices A, X et B.
Résoudre alors matriciellement ce système.

Exercice 5 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendre comme unité graphique le centimètre.

1. Résoudre l'équation $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 2i$.
   a) Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   b) Faire une figure et placer les points A et B.
   c) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
3. On note F le milieu de $[AB]$.
   a) Placer le point F sur la figure précédente et calculer son affixe z_F.
   b) Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right)$ puis en déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OF}\right)$.
   c) Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique.
   d) En déduire la valeur exacte de : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$