Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 16 \end{pmatrix}$ et $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 6 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$

Exercice 2 On calcule
$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\times 5 + (-1)\times 10 & 5\times(-1) + (-1)\times(-2) \\ 10\times 5 + (-2)\times 10 & 10\times(-1) + (-2)\times(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 30 & -6 \end{pmatrix} = 3B \end{aligned}$$
On en déduit alors que $B^3 = BB^2 = B(3B) = 3B^2 = 3(3B) = 9B$.

On a $B^2 = 3B$ et $B^3 = 3^2B$. On peut conjecturer que $B^k = 3^{k-1}B$ pour tout entier k non nul.
On le démontre par récurrence.
<u>Initialisation :</u> La propriété est vraie pour $k = 1$, car $B^1 = 3^{1-1}B = 3^0B = B$, et a même déjà été vérifiée pour $k = 2$ et $k = 3$.
<u>Hérédité :</u> Supposons que pour un entier non nul k on ait $B^k = 3^{k-1}B$,
alors on a $B^{k+1} = BB^k$
soit, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $B^{k+1} = B(3^{k-1}B)$
soit aussi $B^{k+1} = 3^{k-1}B^2$. Or on a vu que $B^2 = 3B$, et on obtient donc que $B^{k+1} = 3^{k-1}\times 3B = 3^kB$, ce qui montre que notre propriété est encore vraie au rang suivant $k+1$.
<u>Conclusion :</u> on vient de démontrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier $k \geqslant 1$, $B^k = 3^{k-1}B$.

Exercice 3 Soit la matrice

a) $C^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

On en déduit que la matrice C est inversible avec $C^{-1} = C$.

b) En multipliant à gauche par C on obtient $CCX = C\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 39 \\ -37 & -42 \\ 30 & 35 \end{pmatrix}$

qui est aussi la matrice X recherchée car $C^2X = I_3X = X$

Exercice 4 Le système $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ s'écrit sous la forme matricielle $AX = B$, avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$.

On connaît directement l'inverse de la matrice A, soit $A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

On résout alors le système matriciellement : $AX = B \iff X = A^{-1}B$, soit
$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

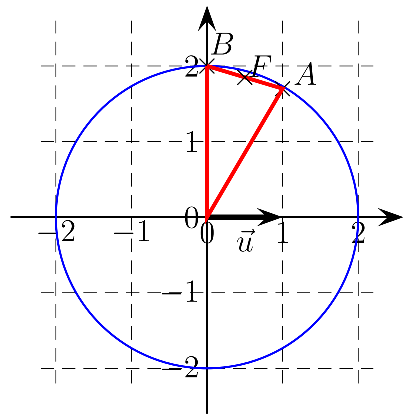
Exercice 5

1. $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0 \iff z^2 - 2z + 4 = 0$ ou $z^2 + 4 = 0$
   La première équation est du second degré, de discriminant $\Delta = -12 < 0$ et admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2 - i\sqrt{12}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

La deuxième équation est aussi du second degré, mais peut se résoudre plus simplement $z^2+4=0 \iff z^2=-4 \iff z=\pm 2i$.
Ainsi, l'équation a quatre solutions $\mathcal{S}=\left\{1-\sqrt{3}; 1i\sqrt{3}; -2i; 2i\right\}$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+i\sqrt{3}$ et $z_B=2i$.
   a) $|z_A|=\sqrt{1+\sqrt{3}^2}=2$ et donc $\cos\theta_A=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\theta_A=\dfrac{\pi}{3}$ et donc que $z_A=1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   On a $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ et donc $z_B=2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

   Comme $|z_A|=|z_B|=2$, on en déduit que les points A et B sont sur un cercle de centre O et de rayon 2.
   b)



   c) On a

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)&=\left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)\\&=\arg(z_B)-\arg(z_A)\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{aligned}$$

3. a) On a $z_F=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{1+i\sqrt{3}+2i}{2}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$
   b) Comme OAB est un triangle isocèle en O avec F le milieu de $[AB]$, on en déduit que (OF) est aussi la bissectrice issue de O et donc que

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{12}$$

   et ensuite $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OF}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{12}$.
   c)

$$|z_F|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+(2+\sqrt{3})^2}{4}}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

   et connaissant l'argument de z_F, on a alors trigonométrique :

$$z_F=\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

   d) En identifiant la partie réelle de $z_F=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ et celle de sa forme trigonométrique, on trouve que

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$$

   d'où

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$