Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

a) On a $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et donc

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) On a $\det(A)=2\times 5-(-5)\times 3=23\neq 0$ et la matrice A est donc inversible avec

$$A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

c) En multipliant par l'inverse, on obtient $AX=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff A^{-1}AX=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ soit, comme $A^{-1}AX=I_2X=X$,

$$X=\frac{1}{23}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On montre par récurrence la propriété , pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 3^n-1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

<u>Initialisation :</u> Pour $n=1$, on a $\begin{pmatrix} 1 & 3^n-1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3^1-1 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=A$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n=1$.

<u>Hérédité :</u> Supposons que pour un entier $n\geqslant 1$, on ait $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 3^n-1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Alors, $A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix} 1 & 3^n-1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2+3(3^n-1) \\ 0 & 3^n\times 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1}-1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$

et la propriété est donc encore vraie au rang suivant $n+1$.

<u>Concluison :</u> on vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier $n\geqslant 1$, on a $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 3^n-1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Exercice 3 Soit deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que : $z_1=4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=-1-i\sqrt{3}$.

a) $z_1=4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4-4i$.

b) On a $|z_2|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ et $\arg(z_2)=\theta$ avec $\cos\theta=\dfrac{-1}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta=-\dfrac{2\pi}{3}$

Sous forme exponentielle, $z_2=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

c) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{4-4i}{-1-i\sqrt{3}}=\dfrac{(4-4i)(-1+i\sqrt{3})}{4}=(-1+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$

et, sous forme exponentielle,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

d) En identifiant les parties réelles des epxressions précédentes de $\dfrac{z_1}{z_2}$, on trouve que

$$2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}=-1+\sqrt{3} \iff \cos\frac{5\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$