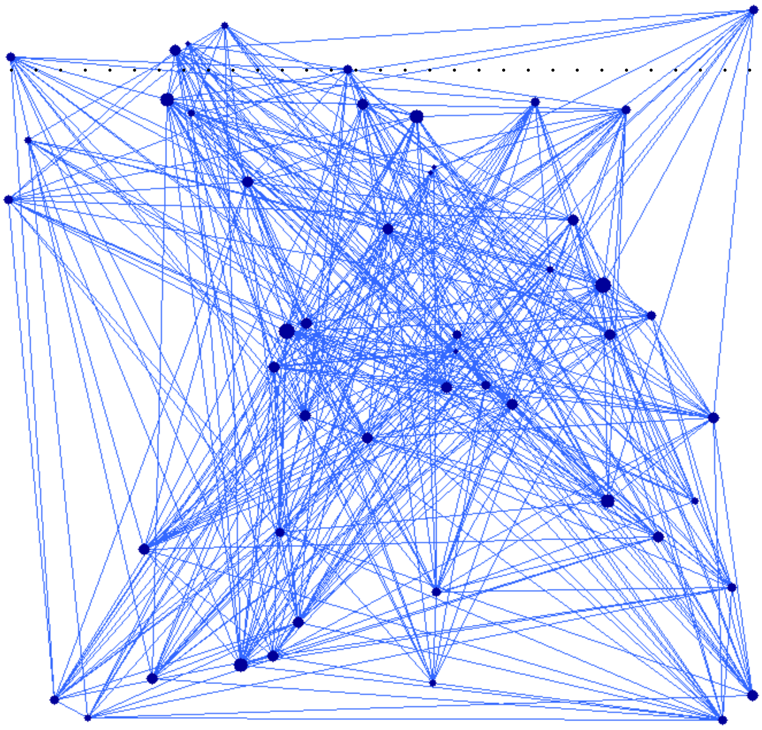
# Graphes et chaînes de Markov

Mathématiques expertes
Terminale générale

## Table des matières

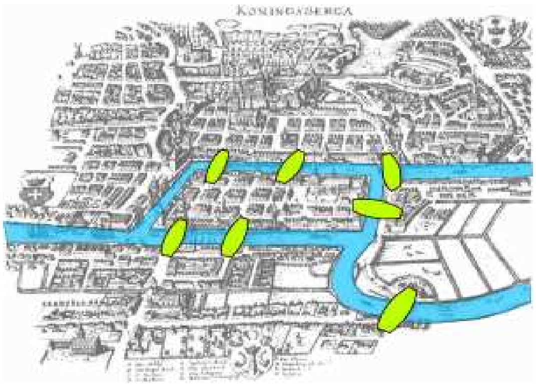




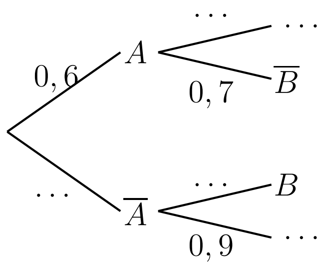
# I - Introduction et échauffements

**Exercice** 1 **Problème des 7 ponts de Königsberg**
Le problème suivant, connu comme le problème des 7 ponts de Königsberg, fut résolu par Euler en 1735. Ce problème est de nos jours largement connu comme étant à l'origine de la théorie des graphes.

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est traversée par la rivière Pregolya, et comporte deux iles. Ces iles sont reliées entre elles et aux berges par, au total, 7 ponts.
Le problème est alors le suivant : est-il possible de se promener dans cette ville en passant une, et une seule, fois par tous les ponts ? Est-il possible de le faire à partir d'un point de départ au choix et de revenir finalement à son point de départ ? (bien sûr, on ne peut traverser la rivière qu'en empruntant un pont).



**Exercice** 2 On considère une expérience aléatoire modélisée par l'arbre ci-contre.




1. Compléter cet arbre.
2. Déterminer $P(A \cap B)$ et $P(B)$.
3. Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

**Exercice** 3 Écrire le système suivant sous forme matriciel : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 8 \\ -3x & + & 4y & = & -1 \end{array}\right.$ puis le résoudre matriciellement.

**Exercice** 4 Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 7$ puis par $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$ pour tout entier $n$.

1. Vers quelle limite $l$ la suite $(u_n)$ peut-elle éventuellement converger ?
2. On pose $v_n = u_n - 4$.
   Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   Exprimer alors $v_n$ en fonction de $n$, puis $u_n$ en fonction de $n$.
   Quelle est la limite de $(u_n)$ ?

**Exercice** 5 Le glucose admet deux isomères (deux composés qui ont la même formule d'ensemble, mais un agencement différent des atomes dans la molécule et donc des propriétés différentes), le dextrose (qui est dextrogyre, c'est-à-dire qui a la propriété de dévier vers la gauche la lumière), et le lévulose (qui est lévogyre, c'est-à-dire qui dévie la lumière vers la droite). Dans une certaine réaction chimique, dite de Pierre Landin, une partie du dextrose se transforme en lévulose et vice-versa. Plus précisément, au cours d'une unité de temps, 60% des molécules de dextrose se transforment en lévulose et les 40% restant demeurent sous forme dextrose, tandis que 35% des molécules de lévulose restent sous forme lévulose et que les 65% autres deviennent dextrose.

On note $d_n$ et $l_n$ les proportions de dextrose et de lévulose au temps $n$ dans le mélange (l'unité de temps est l'heure). On suppose qu'on a, au départ, $d_0 = 1$ et $l_0 = 0$. On note $U_n$ le vecteur colonne $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ l_n \end{pmatrix}$.

1) Représenter l'évolution des proportions de dextrose et de levulose lors de cette réaction chimique par un graphe pondéré.

2) Montrer alors que la réaction se traduit par une égalité matricielle de la forme $U_{n+1} = AU_n$ où $A$ est une matrice 2x2 à préciser. En déduire qu'on a $U_n = A^n U_0$.

3) Calculer $U_1$, $U_2$, $U_3$ et interpréter les résultats en termes de proportions de chaque composant.

4) À l'aide de la calculatrice, calculer $A^n$ pour $n = 10$, $n = 20$, $n = 30$. Que constate-t-on ? Qu'en déduit-on pour les proportions de dextrose et de lévulose ?

5) On pose $B = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,52 \\ 0,48 & 0,48 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer $B^2$, $B^3$, ..., $B^n$

   b) Calculer $C = 4(B - A)$, puis $C^2$, $C^3$, ..., $C^n$.

   c) Calculer $BC$ et $CB$

   d) Déduire de ce qui précède la formule

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,52 + 0,48(-0,25)^n & 0,52\,(1 - (-0,25)^n) \\ 0,48\,(1 - (-0,25)^n) & 0,48 + 0,52(-0,25)^n \end{pmatrix}$$

   e) Calculer enfin $d_n$ et $l_n$ en fonction de $n$, et en déduire leurs limites lorsque $n$ tend vers l'infini.

# II - Graphes

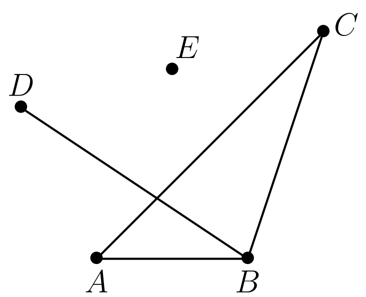
## 1) Définitions

**Définition *Vocabulaire sur les graphes***

- *Un graphe d'ordre n est un ensemble de n points, appelés sommets, relié entre eux par des liens.*
  *Le graphe peut être* ***non orienté****, les liens reliant deux sommets se schématisent par un trait, ou arête.*
  *Le graphe peut aussi être* ***orienté****, les liens se schématisent alors par une flèche, aussi appelé arc. Dans ce cas un sommet peut aussi être relié à lui-même par une boucle.*
- *Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête ou un arc.*
- *Un sommet adjacent à aucun autre est dit* ***isolé****.*
- *Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes ou d'arcs dont ce sommet est une extrémité (une boucle comptant pour 2)*
- *Un graphe est* ***complet*** *si tous les sommets sont adjacents entre eux.*

**Exercice 6** Compléter :

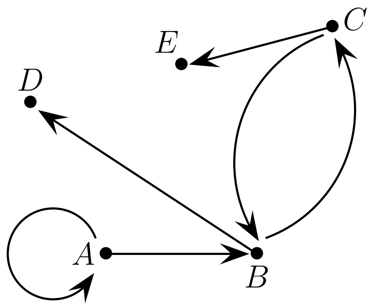
a) Un graphe non orienté d'ordre ... :




Degré des sommets :

| Sommet | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 2 | | | | |

b) Un graphe orienté d'ordre … :




Degré des sommets :

| Sommet | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 3 | | | | |

**Propriété** *Dans un graphe, la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d'arêtes.*

**Définition** ***Parcours dans un graphe***

- *Une chaîne de longueur $n$ est une liste de $n$ sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.*
- *Un graphe est connexe s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe. Pour un graphe orienté, on distingue :*
  - ***fortement connexe** : pour tout couple de sommets A et B, il existe un chemin de A à B et de B à A.*
  - ***faiblement connexe** : si le graphe est connexe sans considérer l'orientation des arcs.*
- *Une chaîne est fermée lorsque l'origine et l'extrémité sont confondues.*
- *Une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes s'appelle un cycle.*

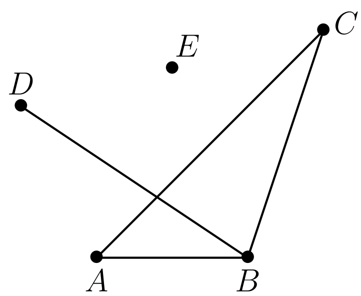
Exemple : Dans le 1$^{er}$ graphe précédent, A-B-C et A-B-D-B-C sont des chaînes de longueurs 3 et 4.
C-B-D-B-A-C est une chaîne fermée.
A-B-C-A est un cycle de longueur 4.

## 2) Matrice d'adjacence

**Définition** *À tout graphe $G$ d'ordre $n$ on associe une matrice carrée $M = (m_{i,j})$ telle que $m_{i,j} = 1$ si une arête ou un arc relie les sommets $i$ et $j$, et $m_{i,j} = 0$ sinon.*
*Cette matrice s'appelle la **matrice d'adjacence** du graphe $G$.*

**Exercice 7** Compléter les matrices d'adjacence :

a)

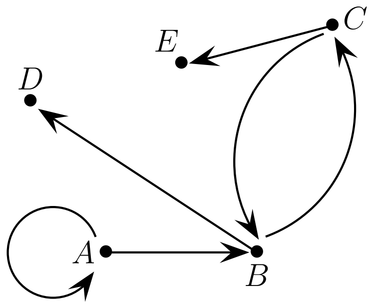



Matrice d'adjacence :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & . & . \\ 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

*La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est une matrice* ……

b)




Matrice d'adjacence :

$$M = \begin{pmatrix} . & . & . & 0 & 0 \\ . & 0 & 1 & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

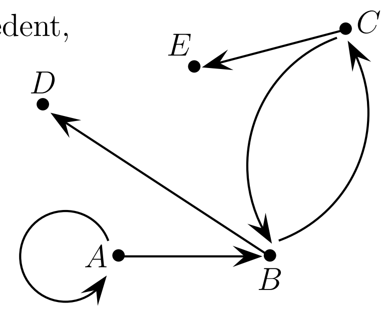
**Théorème** ***Nombre de chemin de longueur*** $p$

*Soit un graphe $G$ de matrice d'adjacence $M = (m_{i,j})$. On note $M^p = \left(m_{i,j}^{(p)}\right)$.*

*Le coefficient $m_{i,j}^{(p)}$ de la matrice $M^p$ est le nombre de chemins de longueur $p$ reliant le sommet $i$ au sommet $j$.*

## Exercice 8

Avec le graphe précédent,




dont la matrice d'adjacence est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il y a par exemple ...chemin(s) de longueur ...reliant B à B.
Il y a par exemple ...chemin(s) de longueur ...reliant B à D.

$M^3 = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$ Il y a ici par exemple ...chemins de longueur ...reliant A à B.

$M^7 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Il y a ici par exemple ...chemins de longueur ...reliant A à E.

Démonstration:

Rappel : pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, la matrice produit est $C = AB$ avec $C = (c_{i,j})$ où $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$

On démontre ce théorème par récurrence.

Initialisation : Pour $p = 1$, on $M^1 = M$ et $m_{i,j}^{(1)} = m_{i,j}$ vaut 0 ou 1 et est bien le nombre de chemin de longueur 1 reliant $s_i$ et $s_j$.

Hérédité : Supposons que pour un entier $p \geqslant 1$, le coefficient $m_{i,j}^{(p)}$ de la matrice $M^p$ soit le nombre de chemins de longueur $p$ reliant $s_i$ et $s_j$.

Alors $M^{p+1} = MM^p$ et donc les coefficients de $M^{p+1}$ sont

$$m_{i,j}^{(p+1)} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{k,j}^{(p)}$$

avec pour chaque terme de la somme

$m_{i,k}$ : nombre de chemins de longueur 1 reliant $s_i$ à $s_k$

$m_{k,j}^{(p)}$ : nombre de chemins de longueur $p$ reliant $s_k$ à $s_j$

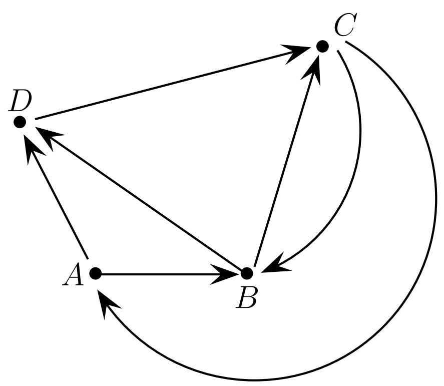
donc $m_{i,k} m_{k,j}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur $p+1$ reliant $s_i$ à $s_j$ en passant par $s_k$.

On fait enfin la somme de ces nombres de chemins de longueur $p+1$ passant par tous les sommets $k$ intermédiaires.

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $p \geqslant 1$. □

**Exercice 9** Les arêtes du graphe suivant représentent des pistes de ski mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphes sont les différents points d'accès à ce domaine skiable.




a) Donner la matrice d'adjacence du graphe.

b) Déterminer le nombre de parcours de 4 km reliant A à C.

c) Déterminer le nombre de parcours de 6 km reliant C à lui-même.

d) Déterminer le nombre de parcours de 6 km reliant A à D.

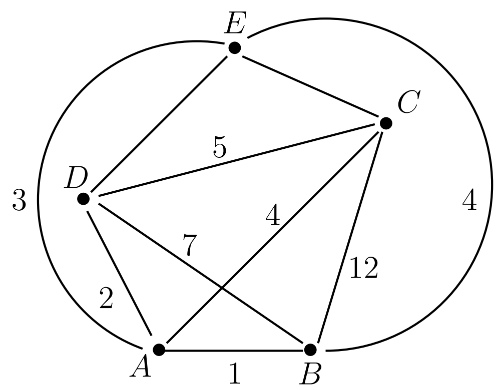
e) Déterminer le nombre de parcours d'au plus 8 km reliant A à D.

AA

## 3) Graphe pondéré

**Définition** *Un graphe, orienté ou non, est pondéré lorsque chacune des arêtes est affectée d'un poids : un nombre positif.*

Par exemple,




La chaîne A-B-C-B-D est une chaîne de poids $1 + 12 + 9 + 7 = 29$

**Exercice** 10 On s'intéresse au problème dit "du voyageur de commerce" : dans un ensemble de villes, trouver le plus court circuit passant par chaque ville une seule fois.

1. On considère dans un premier temps un graphe complet de 5 villes : A, B, C, D et E.
   a) On exclut dans un premier temps le sommet E et on ne considère donc que le sous-graphe constitué des sommets A, B, C et D.

      Combien existe-t-il de chaînes fermées débutant et terminant en A, et ne passant qu'une seule fois par chaque autre sommet ?

      Comment trouver l'itinéraire le plus court ?

   b) Même question en prenant aussi en compte le sommet E.

   c) Combien de chaînes fermées peut-on faire en tout, en partant d'un sommet quelconque et terminant sur ce même sommet ?

2. Combien de chaînes fermées peut-on faire dans un graphe complet avec 10 sommets (10 villes) ? 20 sommets ? 30 sommets ? 50 sommets ? 100 sommets ?

3. En admettant que le calcul du poids total (ou distance totale) nécessite $1\mu$s pour chaque itinéraire, quel est le temps de calcul nécessaire pour le calcul de tous les itinéraires possibles avec 10 sommets ? 20 sommets ? 30 sommets ? 50 sommets ?

Le calcul de l'itinéraire le plus court, pour un nombre important de sommets ne peut donc clairement pas se faire par une liste exhaustive de tous les itinéraires. Dans ces graphes pondérés, l'algorithme de Moore-Dijkstra permet de déterminer la chaîne la plus courte reliant deux sommets de manière efficace.

Il permet de passer du $O(n!)$ à du $O(nln(n))$.

# III - Chaînes de Markov

## 1) Graphe probabiliste

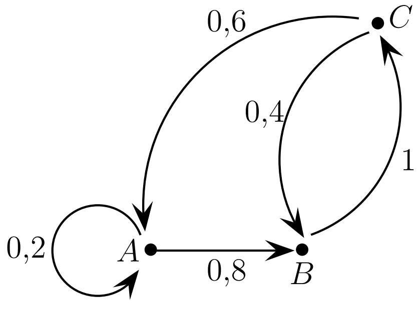
**Définition** *Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré tel que :*

- *Tous les poids sont positifs et inférieurs à 1 : ce sont des probabilités*
- *La somme des poids des chemins issus de chaque sommet est égale à 1.*

*La matrice d'adjacence d'un graphe probabiliste est une* ***matrice stochastique*** *: une matrice carrée avec des coefficients positifs dont la somme à chaque ligne est égale à 1.*

**Exercice** 11

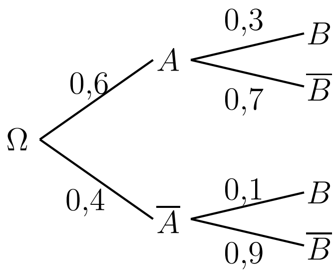
1. Donner la matrice d'adjacence du graphe suivant et vérifier qu'il s'agit d'une matrice stochastique.

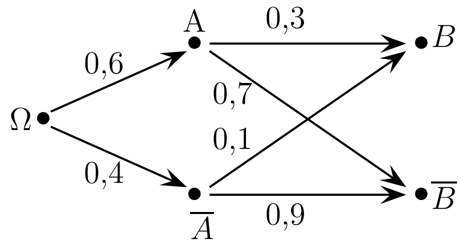



Avec la matrice d'adjacence :

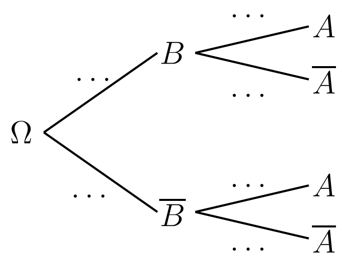
$$M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & . \\ . & . & . \\ . & 0,4 & . \end{pmatrix}$$

2. Un arbre pondéré peut être vu comme un graphe probabiliste, avec par exemple deux événements A et B, donc 4 états A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$ :

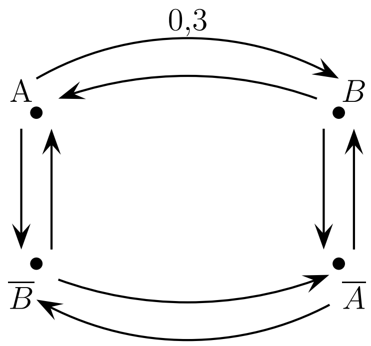



Donner les probabilités $P_A(B)$, $P(B)$, $P_B(A)$, $P_B(\overline{A})$, $P_{\overline{B}}(A)$ et $P_{\overline{B}}(\overline{A})$ et compléter les probabilités sur l'arbre inversé :




Compléter alors finalement le graphe orienté complet et en donner la matrice d'adjacence :




## 2) Chaîne de Markov

**Définition** *Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)$ définies sur un même espace fini muni d'une probabilité et à valeur dans un ensemble $E$ appelé* ***espace d'états*** *et vérifiant*

$$P_{(X_0=e_0, X_1=e_1, \dots, X_n=e_n)}\left(X_{n+1}=e_{n+1}\right) = P_{(X_n=e_n)}\left(X_{n+1}=e_{n+1}\right)$$

*En d'autres termes, la situation du système à l'instant $n+1$ ne dépend que de sa situation à l'instant $n$, et aucunement des situations antérieures $X_0$, $X_1$, ..., $X_{n-1}$.*

Exemples :

a) On considère une urne contenant 10 boules noires et 10 boules blanches dans laquelle on effectue successivement des tirages de la manière suivante : on tire tout d'abord une boule, puis au 2ème tirage on tire une autre boule et on remet celle tirée au 1er tirage. Au 3ème tirage on tire une boule et on remet celle tirée au 2ème, ...

   On note $X_n$ la variable aléatoire égale à la couleur de la boule tirée au n-ième tirage. L'espace d'états est $E = \left\{\text{"noire"}, \text{"blanche"}\right\}$

b) Météo probabiliste simpliste : un jour donné il peut faire beau, mauvais ou un temps variable.
   Lorsqu'un jour il fait beau, il y a une chance sur deux pour qu'il fasse encore beau le lendemain, et une chance sur dix qu'il fasse mauvais.
   S'il fait mauvais un jour, il y a aussi une chance sur deux pour que cela continue le lendemain, et une chance sur dix pour qu'il fasse beau.

Enfin, lorsque le temps est variable un jour, il y a une chance sur cinq pour que le temps reste variable le lendemain, et autant de chance qu'il fasse beau ou mauvais.
On note $X_n$ la variable aléatoire égale au temps qu'il fait le n-ième jour.
L'espace d'états est $E = \Big\{\text{"beau"}, \text{"variable"}, \text{"mauvais"}\Big\}$

On peut préciser un ensemble particulier et courant de chaîne de Markov :

**Définition** *Une chaîne de Markov est dite* ***homogène*** *si, de plus, les probabilités $P_{(X_n=i)}\left(X_{n+1}=j\right)$ ne dépendent pas de $n$. On note alors $p_{i,j}$ cette probabilité, et la matrice $P=(p_{i,j})$ est appelée* ***matrice de transition*** *de la chaîne de Markov.*

Remarque : *Avec une modélisation par une chaîne homogène, la probabilité de passage à l'état $j$ ne* ***dépend donc que de l'état présent*** *du système.*
*En particulier, $P_{(X_n=j)}(X_{n+1}=j) = P_{(X_0=j)}(X_1=i)$*

**Propriété** *La matrice de transition $P=(p_{i,j})$ d'une chaîne de Markov homogène est une matrice stochastique.*
*À une matrice d'une chaîne de Markov homogène, on peut associer un graphe probabiliste dont les sommets sont les états de l'espace $E$ et les arcs reliant l'état $i$ à l'état $j$ sont affectés des coefficients $p_{i,j}$.*

Démonstration: Les coefficients de la matrice sont les probabilités $0 \leqslant p_{i,j} \leqslant 1$ .
De plus, la somme des coefficients de chaque ligne est

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} &= \sum_{j=1}^{N} P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{P\Big((X_n=i)\cap(X_{n+1}=j)\Big)}{P(X_n=i)} \\ &= \frac{1}{P(X_n=i)} \sum_{j=1}^{N} P\Big(X_n=i)\cap(X_{n+1}=j)\Big)\end{aligned}$$

avec, d'après la formule des probabilités totales,

$$\sum_{j=1}^{N} P\Big((X_n=i)\cap(X_{n+1}=j)\Big) = P(X_n=i)$$

$\square$

**Propriété** *On considère une chaîne de Markov homogène $(X_n)$ dont on note $P$ la matrice de transition associée et $\pi_0$ la distribution initiale.*

— *Si on note $P^n=\left(p_{i,j}^{(n)}\right)$ alors on a*

$$p_{i,j}^{(n)} = P_{(X_0=i)}(X_n=j)$$

— *En notant $\pi_n$ la distribution de $X_n$, on a alors, pour tout entier $n$,*

$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

*et donc, avec $\pi_0$ la distribution initiale,*

$$\pi_n = \pi_0 P^n$$

Remarque : Une chaîne de Markov homogène est donc entièrement déterminée par sa distribution initiale et par sa matrice de transition

Démonstration: On cherche à démontrer que $\pi_{n+1}=\pi_nP$.

La matrice de transition $P=(p_{i,j})$ contient les probabilités conditionnelles

$$p_{i,j}=P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)=\frac{P\big((X_n=i)\cap(X_{n+1}=j)\big)}{P(X_n=i)}$$

La matrice produit $\pi_nP$ est une matrice ligne, de taille $1\times n$, soit $Q=\pi_nP$ avec $Q=(q_1\ q_2\ \dots\ q_n)$
En écrivant le produit matriciel $Q=\pi_nP$, on a

$$(q_1\ \dots\ q_j\dots)=\big((\pi_1)_1\ \dots\ (\pi_n)_j\dots\big)\begin{pmatrix} p_{1,1} & \dots & p_{1,j} & \dots \\ p_{2,1} & \dots & p_{2,j} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

soit l'expression

$$\begin{aligned} q_j &= \sum_{k=1}^{n} (\pi_n)_k\, p_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X_n=k)p_{i,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X_n=k)\frac{P\big((X_n=k)\cap(X_{n+1}=j)\big)}{P(X_n=k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P\big((X_n=k)\cap(X_{n+1}=j)\big) \\ &= P(X_{n+1}=j) \end{aligned}$$

la dernière égalité étant la formule des probabilités totales.

On a donc ainsi trouvé que $Q=\pi_{n+1}=\pi_nP$, et donc, par une récureence immédaite,

$$\begin{aligned} \pi_n &= \pi_{n-1}P \\ &= \big(\pi_{n-2}P\big)P \\ &= \pi_{n-2}P^2 \\ &= \big(\pi_{n-3}P\big)P^2 \\ &= \pi_{n-3}P^3 \\ &= \dots \\ &= \pi_0P^n \end{aligned}$$

□

**Exercice 12** On considère une chaîne de Markov à trois états A, B et C, dont la matrice de transition est $P=\begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$. La distribution initiale est $\pi_0=(0,5\quad 0,5\quad 0)$

a) Donner les valeurs des probabilités $P(X_0=A)$, $P(X_0=C)$, $P(X_1=A)$ et $P(X_2=C)$.

b) Exprimer $\pi_n$ en fonction de $\pi_0$ et $P$.

**Exercice 13** Dans une université, les étudiants participent à un mouvement de grève. Le premier jour, 20% des étudiants faisaient grève.

On note $X_n$ la variable aléatoire qui indique si un étudiant désigné au hasard dans l'université fait grève ou non le n-ième jour.

On admet que la suite $(X_n)$ est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est $P=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix}$, dans l'ordre grèviste, non grèviste. On note enfin $\pi_n$ la distribution le n-ième jour.

a) Quelle est la probabilité qu'un étudiant qui fait grève un jour donné ne fasse plus grève le lendemain ? Quelle est la probabilité qu'un non grèviste un jour le reste le lendemain ?

b) Donner $\pi_0$, $\pi_1$, et $\pi_2$.

c) Donner la probabilité qu'un étudiant soit en grève le 3ème jour.

## 3) Distribution invariante

**Définition** *Soit une chaîne de Markov homogène $(X_n)$ de matrice de transition $P$.*
*Une **distribution invariante** est une matrice ligne $\pi$ telle que : $\pi P = \pi$.*
*On parle aussi d'**état stable** de la chaîne de Markov.*

Remarque : On a $\pi P = \pi \iff \pi(I_n - P) = 0$ avec $I_n$ la matrice identité.

Le vecteur ligne nul est toujours solution de cette équation matricielle, mais le vecteur ligne n'est pas une distribution de probabilité (la somme de ses élements ne vaut pas 1).

Ainsi, si la matrice $I_n - P$ est inversible, le système $\pi(I_n - P) = 0$ admet une unique solution, qui est donc le vecteur nul, et il n'existe donc pas de distribution invariante.

Les distribution invariantes sont donc à rechercher lorsque la matrice $I_n - P$ n'est pas inversible.

Exemple : Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $I_2 - P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut

$$\det(I_2 - P) = 1 \times 1 - (-1) \times (-1) = 0$$

Ainsi le système $\pi(I_2 - P) = 0$ n'admet pas qu'une unique solution (pas que la solution nulle).

On vérifie que $\pi = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$ est une distribution invariante.

## Exercice 14

a) Trouver deux nombres réels strictement positifs $x$ et $y$ tels que $x + y = 1$ et solutions du système : $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y = x \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = y \end{cases}$

b) En déduire une distribution invariante de la chaîne de Markov définie par la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

**Exercice 15** On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

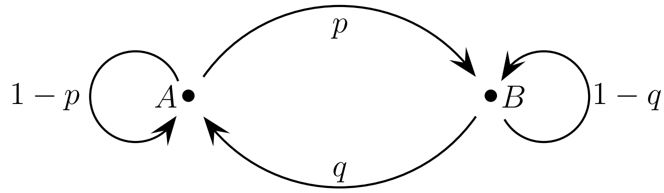
Déterminer une distribution $\pi$ invariante.

Les distributions invariantes sont importantes dans l'étude d'une chaîne de Markov, en raison du théorème suivant :

**Théorème** *Soit $(X_n)$ une chaîne de Markov homogène et $(\pi_n)$ la suite de ses distributions, alors si $(\pi_n)$ converge, $(\pi_n)$ converge vers une distribution invariante (théorème du point fixe pour les suites récurrentes).*

*Pour une chaîne de Markov à deux états, quelque soit la distribution initiales $\pi_0$, la suite $(\pi_n)$ des distributions converge vers la distribution invariante $\pi$.*

Démonstration: On montre le théorème pour pour une chaîne à deux états




La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.

On a alors
$$I_2 - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$$
et donc
$$\det(I_2 - P) = pq - pq = 0$$
ce qui montre que la matrice n'est pas inversible, et donc qu'il existe une solution non nulle à l'équation $\pi P = \pi$.

Soit $\pi = (x\ y)$ avec $x + y = 1$ tel que $\pi = \pi P$. Alors
$$\begin{cases} x = (1-p)x + qy \\ y = px + (1-q)y \end{cases}$$
En substituant $x + y = 1 \iff y = 1 - x$ dans la première équation, on obtient
$$x = (1-p)x + q(1-x) = (1-p-q)x + q$$
soit encore
$$x - (1-p-q)x = (p+q)x = q$$
et donc
$$x = \frac{q}{p+q}$$
De même, on trouve $y = \dfrac{p}{p+q}$ et donc la dstribution invariante
$$\pi = \left( \frac{q}{p+q} \quad \frac{p}{p+q} \right)$$
Soit maintenant $\pi_n = (x_n\ y_n)$, avec $x_n + y_n = 1$, la suite des distributions.

Alors, $\pi_{n+1} = \pi_n P$ c'est-à-dire
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1-p) + y_n q \\ y_{n+1} = x_n p + (1-q) y_n \end{cases}$$
En substituant $x_n + y_n = 1 \iff y_n = 1 - x_n$ dans la première relation, on obtient
$$x_{n+1} = x_n(1-p) + (1-x_n)q = (1-p-q)x_n + q$$
ce qui montre que la suite $(x_n)$ est une suite arithmético géométrique.

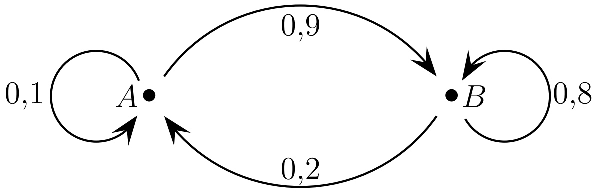
Pour étuider cette suite, on définit la suite auxiliaire $u_n = x_n - \dfrac{q}{p+q}$ dont on montre qu'elle est géométrique de raison $1 - p - q$.

Or, comme $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, on a aussi $0 < 1 - p - q < 1$ et donc la suite géométrique $(u_n)$ converge vers 0.

Comme on a $x_n = u_n + \dfrac{q}{p+q}$, on en déduit que $(x_n)$ converge vers $\dfrac{q}{p+q}$.

De même, on montre que $(y_n)$ converge vers $\dfrac{p}{p+q}$, et donc que $(\pi_n)$ converge vers $\pi$, sans avoir fait la moindre hypothèse sur la distribution initiale $\pi_0$. $\square$

**Exercice 16** On considère une chaîne de Markov $(X_n)$ décrite par le graphe suivant et la distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.




a) Écrire la matrice de transition $M$ associée à cette chaîne de Markov.

b) Calculer $\pi_1$ et $\pi_2$.

c) Donner l'expression de $\pi_n$ en fonction de $n$, puis calculer $\pi_5$ et $\pi_{10}$ (à l'aide de la calculatrice, un ordinateur, ...)

d) Montrer que $(X_n)$ admet une distribution invariante $\pi_l$ et la déterminer.

**Exercice 17** On considère une chaîne de Markov à deux états A et B dans laquelle $P_A(B) = P_B(A)$, avec $P_B(A)$ différent de 0 et de 1.

Montrer qu'à long terme, et quelque soit la distribution de probabilité initiale, les deux états sont équiprobables.

# IV - Exercices

**Exercice 18** Les célèbres Dalton sont à l'heure actuelle en prison. Chaque semaine, ils tentent de s'évader et leur tentative est une réussite une fois sur trois. Une fois évadés, ils ont chaque semaine trois chance sur quatre de se faire capturer.

a) Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à deux états. On notera L l'état « les Dalton sont libre »et P l'état « les Dalton sont en prison ».

Déterminer alors la probabilité qu'ils soient libre dans trois semaines.

b) Quelle est la probabilité qu'ils purgent la totalité de leur peine d'un mois de prison (quatre semaines) sans avoir réussi à s'évader une seule fois ?

**Exercice 19** *D'après Bac ES, Liban 2018*

Dans un pays deux opérateurs se partagent le marché des télécommunications mobiles. Une étude révèle que chaque année :

— parmi les clients de l'opérateur *EfficaceRéseau*, 70 % se réabonnent à ce même opérateur et 30 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* ;

— parmi les clients de l'opérateur *GenialPhone*, 55 % se réabonnent à ce même opérateur et 45 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *Efficaceréseau*.

On note $E$ l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *EfficaceRéseau* » et $G$ l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *GenialPhone* ».

À partir de 2018, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs.

On note également :

— $e_n$ la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau* au 1er janvier $(2018+n)$ ;

— $g_n$ la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* au 1er janvier $(2018+n)$ ;

— $P_n = \begin{pmatrix}e_n & g_n\end{pmatrix}$ désigne la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du système au 1er janvier $(2018+n)$.

Au 1er janvier 2018, on suppose que 10 % des clients possèdent un contrat chez *EfficaceRéseau*, ainsi $P_0 = \begin{pmatrix}0,1 & 0,9\end{pmatrix}$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets $E$ et $G$.

2. a) Déterminer la matrice de transition $M$ associée au graphe en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

   b) Vérifier qu'au 1er janvier 2020, environ 57 % des clients ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.

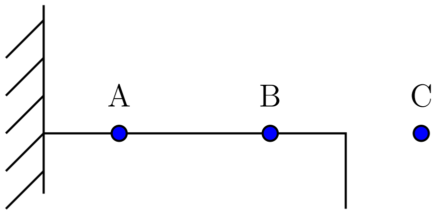
3. a) On rappelle que pour tout entier naturel $n$, $P_{n+1} = P_n \times M$.
   Exprimer $e_{n+1}$ en fonction de $e_n$ et $g_n$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $e_{n+1} = 0,25e_n + 0,45$.

4. Déterminer l'état stable du système et interpréter votre réponse dans le contexte de l'exercice.

## Exercice 20 *Marche aléatoire*

Un robot se déplace unidirectionnellement, vers la droite ou vers la gauche, au hasard et avec la même probabilité. Il peut se trouver en trois position, A, B ou C et est bloqué par un mur sur la gauche de A. Depuis A, il peut donc, avec la même probabilité, se déplacer en B ou rebondir contre le mur et se retrouver à nouveau en A.
En C, le robot à chuté et ne peut, bien sûr, plus aller ailleurs qu'en C.




Le robot est initialement en A. Quelle est la probabilité qu'il ait chuté après 3 déplacements ? après 5 déplacements ? après 10 déplacements ? Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas encore tombé après 10 déplacements ?