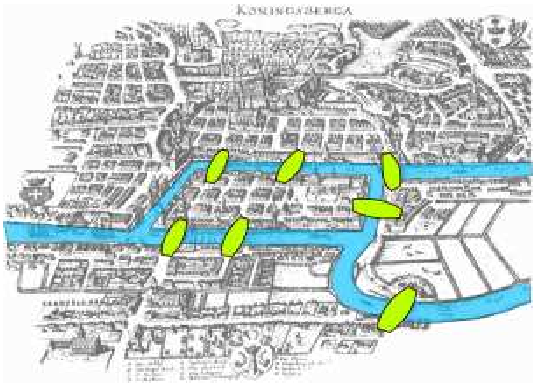
Graphes et chaînes de Markov - Exercices

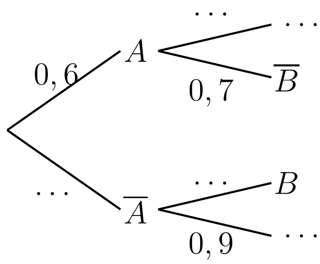
Mathématiques expertes
Terminale générale

Exercice 1 Problème des 7 ponts de Königsberg
Le problème suivant, connu comme le problème des 7 ponts de Königsberg, fut résolu par Euler en 1735. Ce problème est de nos jours largement connu comme étant à l'origine de la théorie des graphes.

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est traversée par la rivière Pregolya, et comporte deux iles. Ces iles sont reliées entre elles et aux berges par, au total, 7 ponts.
Le problème est alors le suivant : est-il possible de se promener dans cette ville en passant une, et une seule, fois par tous les ponts ? Est-il possible de le faire à partir d'un point de départ au choix et de revenir finalement à son point de départ ? (bien sûr, on ne peut traverser la rivière qu'en empruntant un pont).



Exercice 2 On considère une expérience aléatoire modélisée par l'arbre ci-contre.



1. Compléter cet arbre.
2. Déterminer $P(A\cap B)$ et $P(B)$.
3. Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 3 Écrire le système suivant sous forme matriciel : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 8 \\ -3x & + & 4y & = & -1 \end{array}\right.$ puis le résoudre matriciellement.

Exercice 4 Soit la suite (u_n) définie par $u_0=7$ puis par $u_{n+1}=0,5u_n+2$ pour tout entier n.

1. Vers quelle limite l la suite (u_n) peut-elle éventuellement converger ?
2. On pose $v_n=u_n-4$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   Exprimer alors v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
   Quelle est la limite de (u_n) ?

Exercice 5 Le glucose admet deux isomères (deux composés qui ont la même formule d'ensemble, mais un agencement différent des atomes dans la molécule et donc des propriétés différentes), le dextrose (qui est dextrogyre, c'est-à-dire qui a la propriété de dévier vers la gauche la lumière), et le lévulose (qui est lévogyre, c'est-à-dire qui dévie la lumière vers la droite). Dans une certaine réaction chimique, dite de Pierre Landin, une partie du dextrose se transforme en lévulose et vice-versa. Plus précisément, au cours d'une unité de temps, 60% des molécules de dextrose se transforment en lévulose et les 40% restant demeurent sous forme dextrose, tandis que 35% des molécules de lévulose restent sous forme lévulose et que les 65% autres deviennent dextrose.

On note d_n et l_n les proportions de dextrose et de lévulose au temps n dans le mélange (l'unité de temps est l'heure). On suppose qu'on a, au départ, $d_0=1$ et $l_0=0$. On note U_n le vecteur colonne $U_n=\begin{pmatrix} d_n \\ l_n \end{pmatrix}$.

1) Représenter l'évolution des proportions de dextrose et de levulose lors de cette réaction chimique par un graphe pondéré.

2) Montrer alors que la réaction se traduit par une égalité matricielle de la forme $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice 2x2 à préciser. En déduire qu'on a $U_n = A^n U_0$.

3) Calculer U_1, U_2, U_3 et interpréter les résultats en termes de proportions de chaque composant.

4) À l'aide de la calculatrice, calculer A^n pour $n = 10$, $n = 20$, $n = 30$. Que constate-t-on ? Qu'en déduit-on pour les proportions de dextrose et de lévulose ?

5) On pose $B = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,52 \\ 0,48 & 0,48 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer B^2, B^3, …, B^n

   b) Calculer $C = 4(B - A)$, puis C^2, C^3, …, C^n.

   c) Calculer BC et CB

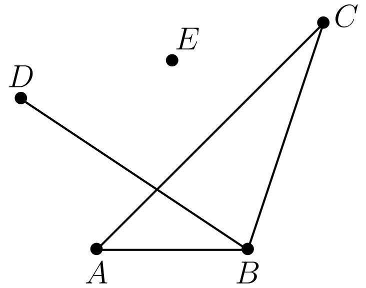
   d) Déduire de ce qui précède la formule

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,52 + 0,48(-0,25)^n & 0,52\,(1 - (-0,25)^n) \\ 0,48\,(1 - (-0,25)^n) & 0,48 + 0,52(-0,25)^n \end{pmatrix}$$

   e) Calculer enfin d_n et l_n en fonction de n, et en déduire leurs limites lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 6 Compléter :

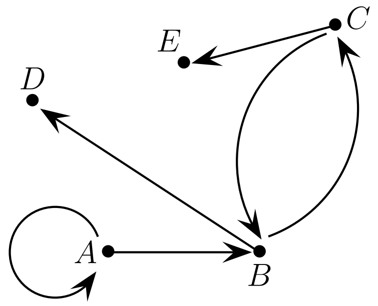
a) Un graphe non orienté d'ordre … :



Degré des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	2				

b) Un graphe orienté d'ordre … :

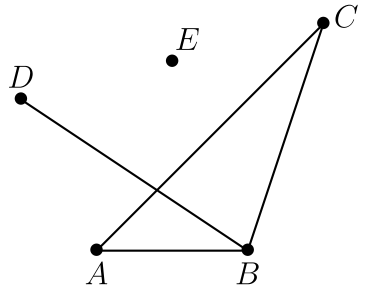


Degré des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	3				

Exercice 7 Compléter les matrices d'adjacence :

a)

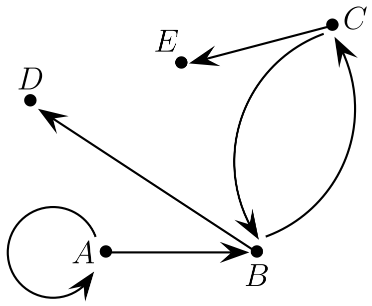


Matrice d'adjacence :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & . & . \\ 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est une matrice ……

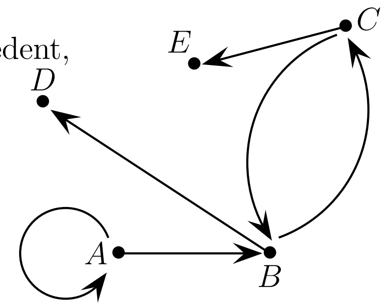
b)



Matrice d'adjacence :

$$M = \begin{pmatrix} . & . & . & 0 & 0 \\ . & 0 & 1 & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Exercice 8 Avec le graphe précédent,



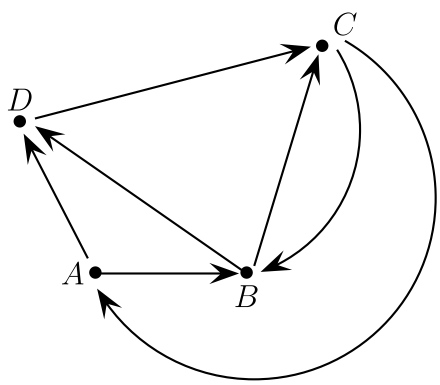
dont la matrice d'adjacence est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il y a par exemple ...chemin(s) de longueur ...reliant B à B.
Il y a par exemple ...chemin(s) de longueur ...reliant B à D.

$M^3 = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$ Il y a ici par exemple ...chemins de longueur ...reliant A à B.

$M^7 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Il y a ici par exemple ...chemins de longueur ...reliant A à E.

Exercice 9 Les arêtes du graphe suivant représentent des pistes de ski mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphes sont les différents points d'accès à ce domaine skiable.



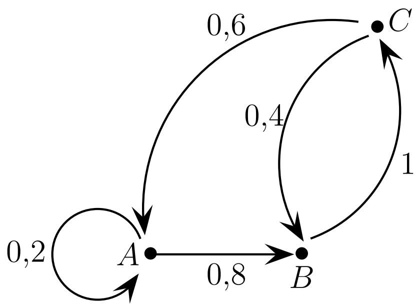
a) Donner la matrice d'adjacence du graphe.
b) Déterminer le nombre de parcours de 4 km reliant A à C.
c) Déterminer le nombre de parcours de 6 km reliant C à lui-même.
d) Déterminer le nombre de parcours de 6 km reliant A à D.
e) Déterminer le nombre de parcours d'au plus 8 km reliant A à D.

Exercice 10 On s'intéresse au problème dit "du voyageur de commerce" : dans un ensemble de villes, trouver le plus court circuit passant par chaque ville une seule fois.

1. On considère dans un premier temps un graphe complet de 5 villes : A, B, C, D et E.
   a) On exclut dans un premier temps le sommet E et on ne considère donc que le sous-graphe constitué des sommets A, B, C et D.
   Combien existe-t-il de chaînes fermées débutant et terminant en A, et ne passant qu'une seule fois par chaque autre sommet ?
   Comment trouver l'itinéraire le plus court ?
   b) Même question en prenant aussi en compte le sommet E.
   c) Combien de chaînes fermées peut-on faire en tout, en partant d'un sommet quelconque et terminant sur ce même sommet ?
2. Combien de chaînes fermées peut-on faire dans un graphe complet avec 10 sommets (10 villes) ? 20 sommets ? 30 sommets ? 50 sommets ? 100 sommets ?
3. En admettant que le calcul du poids total (ou distance totale) nécessite 1μs pour chaque itinéraire, quel est le temps de calcul nécessaire pour le calcul de tous les itinéraires possibles avec 10 sommets ? 20 sommets ? 30 sommets ? 50 sommets ?

Exercice 11

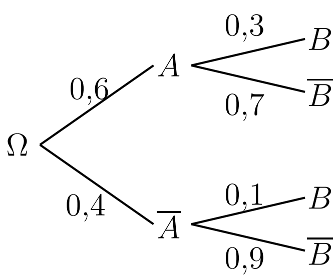
1. Donner la matrice d'adjacence du graphe suivant et vérifier qu'il s'agit d'une matrice stochastique.

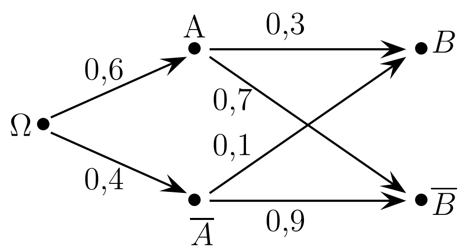


Avec la matrice d'adjacence :

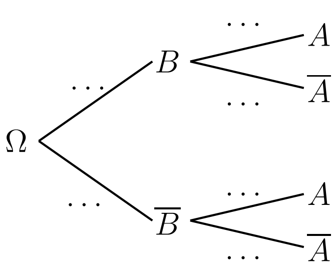
$$M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & . \\ . & . & . \\ . & 0,4 & . \end{pmatrix}$$

2. Un arbre pondéré peut être vu comme un graphe probabiliste, avec par exemple deux événements A et B, donc 4 états A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$:

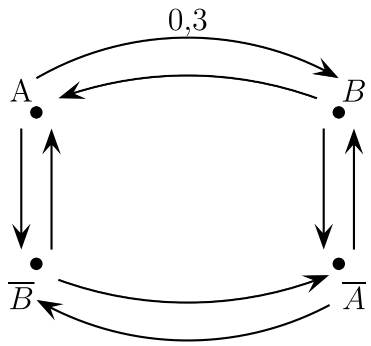




Donner les probabilités $P_A(B)$, $P(B)$, $P_B(A)$, $P_B(\overline{A})$, $P_{\overline{B}}(A)$ et $P_{\overline{B}}(\overline{A})$ et compléter les probabilités sur l'arbre inversé :



Compléter alors finalement le graphe orienté complet et en donner la matrice d'adjacence :



Exercice 12 On considère une chaîne de Markov à trois états A, B et C, dont la matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$. La distribution initiale est $\pi_0 = (0,5 \quad 0,5 \quad 0)$

a) Donner les valeurs des probabilités $P(X_0 = A)$, $P(X_0 = C)$, $P(X_1 = A)$ et $P(X_2 = C)$.

b) Exprimer π_n en fonction de π_0 et P.

Exercice 13 Dans une université, les étudiants participent à un mouvement de grève. Le premier jour, 20% des étudiants faisaient grève.

On note X_n la variable aléatoire qui indique si un étudiant désigné au hasard dans l'université fait grève ou non le n-ième jour.

On admet que la suite (X_n) est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix}$, dans l'ordre grèviste, non grèviste. On note enfin π_n la distribution le n-ième jour.

a) Quelle est la probabilité qu'un étudiant qui fait grève un jour donné ne fasse plus grève le lendemain ? Quelle est la probabilité qu'un non grèviste un jour le reste le lendemain ?

b) Donner π_0, π_1, et π_2.

c) Donner la probabilité qu'un étudiant soit en grève le 3ème jour.

Exercice 14

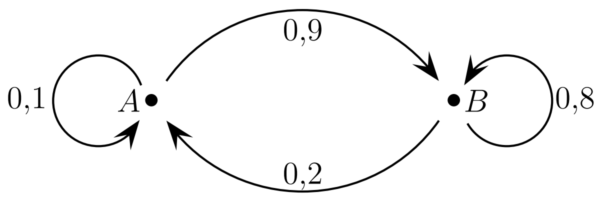
a) Trouver deux nombres réels strictement positifs x et y tels que $x + y = 1$ et solutions du système : $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y = x \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = y \end{cases}$

b) En déduire une distribution invariante de la chaîne de Markov définie par la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

Exercice 15 On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une distribution π invariante.

Exercice 16 On considère une chaîne de Markov (X_n) décrite par le graphe suivant et la distribution initiale $\pi_0 = (1 \quad 0)$.



a) Écrire la matrice de transition M associée à cette chaîne de Markov.

b) Calculer π_1 et π_2.

c) Donner l'expression de π_n en fonction de n, puis calculer π_5 et π_{10} (à l'aide de la calculatrice, un ordinateur, ...)

d) Montrer que (X_n) admet une distribution invariante π_l et la déterminer.

Exercice 17 On considère une chaîne de Markov à deux états A et B dans laquelle $P_A(B) = P_B(A)$, avec $P_B(A)$ différent de 0 et de 1.

Montrer qu'à long terme, et quelque soit la distribution de probabilité initiale, les deux états sont équiprobables.

Exercice 18 Les célèbres Dalton sont à l'heure actuelle en prison. Chaque semaine, ils tentent de s'évader et leur tentative est une réussite une fois sur trois. Une fois évadés, ils ont chaque semaine trois chance sur quatre de se faire capturer.

a) Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à deux états. On notera L l'état « les Dalton sont libre »et P l'état « les Dalton sont en prison ».

Déterminer alors la probabilité qu'ils soient libre dans trois semaines.

b) Quelle est la probabilité qu'ils purgent la totalité de leur peine d'un mois de prison (quatre semaines) sans avoir réussi à s'évader une seule fois ?

Exercice 19 *D'après Bac ES, Liban 2018*

Dans un pays deux opérateurs se partagent le marché des télécommunications mobiles. Une étude révèle que chaque année :

— parmi les clients de l'opérateur *EfficaceRéseau*, 70 % se réabonnent à ce même opérateur et 30 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* ;

— parmi les clients de l'opérateur *GenialPhone*, 55 % se réabonnent à ce même opérateur et 45 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *Efficaceréseau*.

On note E l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *EfficaceRéseau* » et G l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *GenialPhone* ».

À partir de 2018, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs.

On note également :

— e_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau* au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018 + n)$;

— g_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018 + n)$;

— $P_n = \begin{pmatrix} e_n & g_n \end{pmatrix}$ désigne la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du système au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018 + n)$.

Au 1er janvier 2018, on suppose que 10 % des clients possèdent un contrat chez *EfficaceRéseau*, ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G.
2. a) Déterminer la matrice de transition M associée au graphe en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

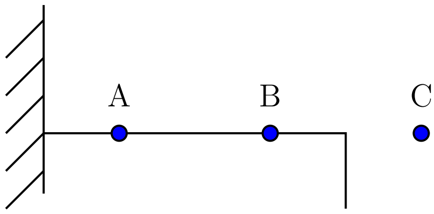
   b) Vérifier qu'au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020, environ 57 % des clients ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.
3. a) On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.

   Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n et g_n.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0,25e_n + 0,45$.
4. Déterminer l'état stable du système et interpréter votre réponse dans le contexte de l'exercice.

Exercice 20 *Marche aléatoire*

Un robot se déplace unidirectionnellement, vers la droite ou vers la gauche, au hasard et avec la même probabilité. Il peut se trouver en trois position, A, B ou C et est bloqué par un mur sur la gauche de A. Depuis A, il peut donc, avec la même probabilité, se déplacer en B ou rebondir contre le mur et se retrouver à nouveau en A.
En C, le robot à chuté et ne peut, bien sûr, plus aller ailleurs qu'en C.



Le robot est initialement en A. Quelle est la probabilité qu'il ait chuté après 3 déplacements ? après 5 déplacements ? après 10 déplacements ? Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas encore tombé après 10 déplacements ?