Arithmétique
Division euclidienne - Congruences
Exercices

Mathématiques expertes
Terminale générale

Exercice 1 **Divisiblité par 3 et par 9**

Les nombres suivants sont-ils divisibles par 3 ? par 9 ? par 6 ? par 18 ?
27 - 129 - 567 - 837 - 22134 - 1556 - 50166

Exercice 2 **Sur la parité**

a) Quelle est la parité du carré d'un nombre pair ? du carré d'un nombre impair ?

b) Quelle est la parité du produit de deux nombres pairs ? de deux nombres impairs ?

c) Quelle est la parité de la somme de deux nombres pairs ? de deux nombres impairs ?

d) Énoncer une règle sur la parité du produit de deux entiers et une règle sur la parité de la somme de deux entiers.

Exercice 3 **Sur les puissances**

Écrire sous la forme de produits et puissances, plus simples : $(5^2)^6$ - $(2\times 3^2)^3$ - $(2^{2n+1})^3$ - $\left(\dfrac{5^2}{3}\right)^4$

Factoriser : $2^{n+3}-2^n$ - $3^{2n+1}-3^{n+1}$ - $4^{n+1}-2^{n+2}$

Exercice 4

Je dispose de 100 chaussettes, 50 noires et 50 rouges, toutes mélangées en vrac.
Avoir une chaussette rouge à un pied et une noire à l'autre est particulièrement moche.
Combien dois-je en tirer, au minimum, pour être sûr d'avoir une paire de chaussettes de la même couleur ?

Exercice 5

a) Donner les éventuels diviseurs parmi 2, 3, 4, 5, 9 10 des nombres suivants :
20 - 54 - 126 - 1932 - - 2020 - 2040 - 10 004

b) Donner <u>tous</u> les diviseurs de : 20 - 36 - 54 - 147

Exercice 6

a) Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x;y)$ tels que $x^2-2xy=15$

b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x;y)$ tels que $4x=20+2xy$

Exercice 7

Déterminer, de deux manières différentes, les entiers relatifs n tels que $(n-3)$ divise $(n+5)$.

a) en revenant à la définition de la divisibilité

b) en remarquant que $(n-3)$ divise $(n-3)$ et en faisant intervenir une combinaison linéaire judicieuse de $(n-3)$ et $(n+5)$.

Exercice 8

1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on $(n+8)$ divisible par n ?
2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n la fraction $\dfrac{6n+12}{2n+1}$ est-elle un entier relatif ?

Exercice 9

a) Montrer que si un entier naturel d divise $(12n+7)$ et $(3n+1)$ alors il divise 3.

b) En déduire que la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

Exercice 10

Trouver les entiers naturels n qui ont, dans la division euclidienne par 4, un quotient égal au reste.

Exercice 11

Trouver un entier naturel qui, dans la division euclidienne par 23 a pour reste 1, et dans la division euclidienne par 17 a le même quotient et pour reste 13.

Exercice 12 La différence de deux entiers naturels est 885. Si on divise l'un par l'autre, le quotient est 29 et le reste 17. Quels sont ces deux entiers ?

Exercice 13 Un entier naturel n est tel que si on le divise par 5 le reste vaut 3 et si on le divise par 6 le reste augmente de 1 et le quotient diminue de 1. Déterminer n.

Exercice 14 Soit n et p deux entiers naturels. On sait que le reste dans la division euclidienne de n par 11 vaut 8 et que le reste dans la division euclidienne de p par 11 vaut 7.

Quel est le reste de $n+p$ dans la division euclidienne par 11 ?

Exercice 15 Donner le reste de la division euclidienne de 4^2 par 15.

En déduire que que $4^{6n}-1$ est divisible par 15.

Exercice 16 Déterminer le reste de la division euclidienne de 39^{60} par 7.

Exercice 17 Déterminer le chiffre des unités dans l'écriture décimale de 3^{2023}.

Exercice 18 1. Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 2^n dans la division par 9. Résumer les résultats dans un tableau de congruence.

2. En déduire les entiers n tels que 2^n-1 est divisible par 9.

Exercice 19 1. Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 3^n dans la division par 7. Résumer les résultats dans un tableau de congruence.

2. En déduire les entiers n tels que 3^n-6 est divisible par 7.
3. En déduire que $164^{2021}\equiv 5[7]$.

Exercice 20 Le 1er janvier 2012 était un dimanche.

1. Calculer le nombre de jours séparant ce 1er janvier 2012 du 1er janvier 2019.
   En déduire quel était le jour de la semaine du 1er janvier 2019.
2. Quel est le jour de la semaine du 1er janvier 2040 ?

Exercice 21 On appelle inverse de x modulo 5, un entier y tel que $xy\equiv 1[5]$.

1. Déterminer un inverse modulo 5 de $x=2$.
2. Déterminer un inverse modulo 5 de $x=3$ et $x=4$.
3. Est-ce que $x=5$ admet un inverse ?
4. À l'aide d'un tableau de congruence, déterminer suivant la valeur de x son inverse modulo 5.
5. Résoudre les équations $E_1 : 2x\equiv 3[5]$ et $E_2 : 9x\equiv 1[5]$

Exercice 22 On décide de former des nombres dans le système décimal en écrivant de gauche à droite quatre chiffres consécutifs dans l'ordre croissant puis on permute les deux premiers chiffres de gauche. Par exemple, à partir de 4567 on obtient 5467, ou encore à partir de 2345 on obtient 3245.

Démontrer que tous les entiers naturels ainsi obtenus sont multiples de 11.

Exercice 23 On considère un entier de 3 chiffres. On appelle renversé de cet entier le nombre qui s'écrit en échangeant les chiffres des centaines et des unités.
Par exemple, le renversé de 238 est 832.

Montrer que la différence entre un entier et son renversé est divisible par 9.

Exercice 24 On considère la suite (u_n) d'entiers définie par $u_0=14$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=5u_n-6$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Quelle conjecture peut-on faire sur les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que, pour tout entier n, on a $u_{n+2}\equiv u_n[4]$.
   En déduire que, pour tout entier n, on a $u_{2n}\equiv 2[4]$ et $u_{2n+1}\equiv 0[4]$.
3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2u_n=5^{n+2}+3$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n\equiv 28[100]$.
   c) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.