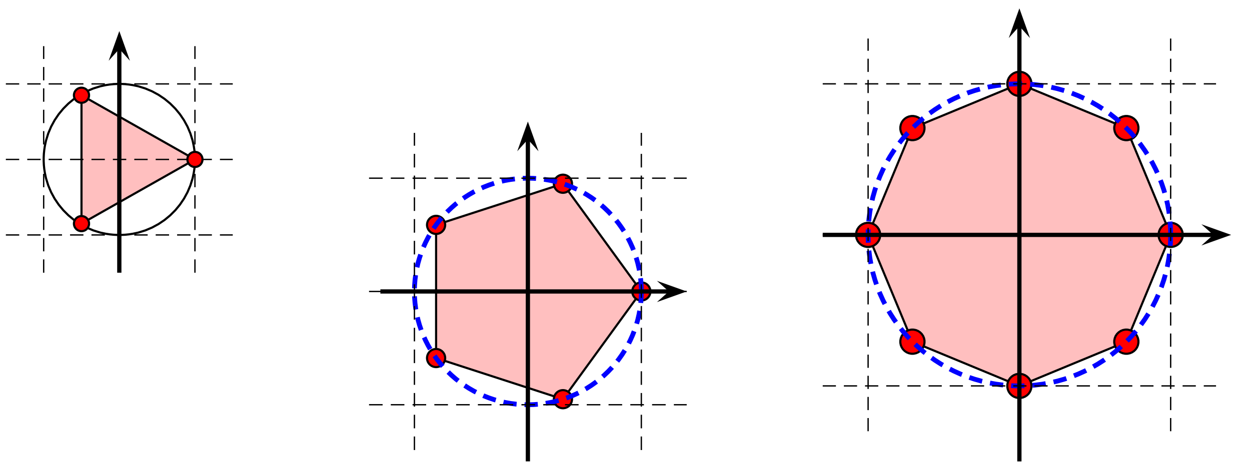
Polynômes complexes

Mathématiques expertes
Terminale générale

Factorisation dans $\mathbb{C}$ et racines de l'unité

Table des matières



I - Échauffements

Exercice 1

a) Résoudre $z^2 - 4z - 5 = 0$. Factoriser ensuite $z^2 - 4z - 5$.

b) Résoudre $z^2 - 4z + 5 = 0$. Factoriser ensuite $z^2 - 4z + 5$.

c) Écrire $z = -1$ sous forme exponentielle. Donner alors trois nombres complexes z tels que $z^3 = -1$.

d) Écrire sous forme exponentielle $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Résoudre alors $z^2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

e) Donner 4 nombres complexes z tels que $z^4 = 1$. Écrire ces nombres sous forme exponentielle.

II - Polynômes

1) Définition

Propriété — *Un polynôme P est une expression algébrique qui peut s'écrire sous la forme :*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$$

— *Si $c_n \neq 0$, le polynôme P est de degré n. On note $\deg(P) = n$.*
— *a est une racine de P si et seulement si $P(a) = 0$.*

Exemples :

- $P(z) = 3x^3 + 2z - 5$ est un polynôme de degré 3
- $Q(z) = 2z^2 - z - 1$ est un polynôme de degré 2, ou un trinôme du second degré
- $R(z) = 10z^{15}$ est un monôme de degré 15
- $S(X) = -5X^{12} + 3X$ est un polynôme du 12ème degré, ou un binôme de degré 12.
- $T(x) = 2x + 3$ est un polynôme de degré 1, ou un binôme de degré 1, ou une expression affine.
- $a = 1$ est une racine des polynômes P et Q, mais pas des suivants.

2) Racines et factorisation des polynômes

Propriété *Pour tout nombre complexe z on a*

$$z^n - a^n = (z - a)Q(z)$$

où Q est un polynôme de degré $n - 1$.

Démonstration: On démontre cette propriété par récurrence : soit la propriété
$P(n)$: « $z^n - a^n = (z - a)Q(z)$ avec Q un polynôme de degré $n - 1$. »

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $z^1 - a^1 = (z - a)Q(z)$ avec $Q(z) = 1$ de degré $0 = n - 1$.
La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $z^n - a^n = (z - a)Q(z)$ avec $\deg(Q) = n - 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
z^{n+1} - a^{n+1} &= z \times z^n - a^{n+1} \\
&= z\Big(a^n + (z - a)Q(z)\Big) - a^{n+1} \\
&= za^n + z(z - a)Q(z) - a^{n+1} \\
&= a^n(z - a) + z(z - a)Q(z) \\
&= (z - a)\Big(a^n + zQ(z)\Big) \\
&= (z - a)R(z)
\end{aligned}$$

avec $R(z)=zQ(z)+a^n$ qui est un polynôme de degré n, et qui montre donc que la propriété est aussi vraie au rang $n+1$.

Conclusion : On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier non nul n, on a z^n-a^n se factorise par $z-a$. □

Propriété ***Propriété fondamentale des polynômes***
Un polynôme P admet a comme racine si et seulement si P se factorise par $(z-a)$, c'est-à-dire si et seulement si il existe un polynôme Q tel que

$$\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z-a)Q(z)$$

Démonstration: Soit

$$P(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z+c_0$$

On a $P(z)=P(z)-P(a)$ puisque a est une racine de P, soit $P(a)=0$.
On détaille alors :

$$\begin{aligned}P(z)&=P(z)-P(a)\\&=\Big(c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z+c_0\Big)-\Big(c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}+\cdots+c_1a+c_0\Big)\\&=c_n\left(z^n-a^n\right)+c_{n-1}\left(z^{n-1}-a^{n-1}\right)+\cdots+c_1(z-a)\end{aligned}$$

Maintenant, d'après la propriété précédente, chaque terme se factorise par $(z-a)$, soit

$$\begin{aligned}P(z)&=c_n(z-a)Q_n(z)+c_{n-1}(z-a)Q_{n-1}(z)+\cdots+c_1(z-a)Q_1(z)\\&=(z-a)R(z)\end{aligned}$$

avec le polynôme

$$R(z)=c_nQ_n(z)+c_{n-1}Q_{n-1}(z)+\cdots+c_1Q(z)$$

□

3) Factorisation d'un polynôme : méthode pratique

3 - a) Méthode 1 : identification des coefficients

On a vu plus tôt comment factoriser en pratique un polynôme. Par exemple $P(z)=z^3+z^2+z-3$ admet 1 comme racine évidente et on le factorise par $(z-1)$:

$$P(z)=(z-1)Q(z)$$

où $Q(z)$ est un polynôme de degré 2, c'est-à-dire

$$P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$$

On développe alors cette dernière factorisation, on regroupe et ordonne les termes :

$$P(z)=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$$

puis on identifie les coefficients avec l'expression initiale du polynôme :

$$\left\{\begin{array}{rcl}a&=&1\\b-a&=&1\\c-b&=&1\\-c&=&-3\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}a=1\\b=2\\c=3\end{array}\right.$$

d'où la factorisation

$$P(z)=(z-1)(z^2+2z+3)$$

3 - b) Méthode 2 : division euclidienne de polynômes

$$\begin{array}{l|l} z^3+z^2+z-3 & z-1 \\ \cline{2-2} \underline{z^3-z^2} & z^2 \\ \qquad 2z^2 & \end{array}$$

puis on continue

$$\begin{array}{l|l} z^3+z^2+z-3 & z-1 \\ \cline{2-2} \underline{z^3-z^2} & z^2\mathbf{+2z} \\ \qquad 2z^2+z & \\ \qquad \underline{2z^2-2z} & \\ \qquad\qquad\quad 3z & \end{array}$$

et enfin

$$\begin{array}{l|l} z^3+z^2+z-3 & z-1 \\ \cline{2-2} \underline{z^3-z^2} & z^2+2z\mathbf{+3} \\ \qquad 2z^2+z & \\ \qquad \underline{2z^2-2z} & \\ \qquad\qquad\quad 3z-3 & \\ \qquad\qquad\quad \underline{3z-3} & \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

On trouve bien sûr un reste nul (car P est divisible par $z-1$, c'est le théorème de factorisation), et on trouve finalement la factorisation

$$P(z) = (z-1)(z^2+2z+3)$$

Exercice 2

1. Soit $P(z) = z^2 + 3z - 4$. Montrer que 1 est une racine de P et factoriser P par $z-1$.
2. On considère l'équation $z^3 + 2z^2 - z - 2 = 0$. Vérifier que 1 est une solution, puis déterminer toutes les solutions de cette équation.
3. Soit $P(z) = 2z^3 + 3z^2 - z - 2$. Montrer que -1 est une racine puis factoriser P.
4. Soit $P(z) = z^4 - 2z^3 - z + 2$. Montrer que 1 et 2 sont racines de P puis factoriser P.
5. Soit $P(z) = -2z^2 + 3z - 2 - 3i$. Montrer que i est une racine de P et factoriser P.
6. Soit $P(z) = z^3 - 8$. Déterminer une racine réelle simple a de P, puis factoriser P.

Exercice 3

a) Factoriser $z^3 - i^3$ par $z - i$

b) Factoriser $z^4 - 1$ puis $z^5 - 1$.

Exercice 4

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z-i)(z^2 + pz + q)$.
3. Déterminer alors toutes les racines du polynôme P.

Exercice 5

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $P(z) = (z^2+1)Q(z)$ pour tout nombre complexe z.

b) En déduire toutes les racines dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$, du polynôme P.

Exercice 6 Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 3z^3 + (1 + 6i)z^2 + 2(8 + i)z + 32i$.

a) Vérifier que $z_0 = -2i$ est une racine de P.

b) En déduire une factorisation de P, et déterminer alors toutes les racines de P.

On finit par le fait que l'ensemble des nombres complexes clôt les questions sur l'existence de racines des polynômes, c'est-à-dire sur la nécessité éventuelle de rechercher un ensemble de nombres « plus grand » que $\mathbb{C}$, donc contenant $\mathbb{C}$, pour résoudre d'autres équatiosn algébriques : l'ensemble des nombres complexes permet de résoudre **toutes les équations algébriques**.

On dit justement que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Théorème ***Théorème fondamental de l'algèbre - théorème de d'Alembert-Gauss***
Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 à coefficients dans $\mathbb{C}$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

En utilisant ensuite le théorème fondamental de la factorisation des polynômes, on obtient alors le théorème

Corollaire *Tout polynôme à coefficients complexes est scindé : il peut se factoriser par des produits de polynôme du premier degré :*

$$P(z) = k(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)$$

Tout polynôme de degré n dans $\mathbb{C}$ admet n racines dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes).

Démonstration: Par réccurence descendante sur le degré n du polynôme.
Soit P_n un polynôme de degré $n \geqslant 1$, alors P_n admet au moins une racine a_n (théorème de d'Alembert-Gauss), et on le factorise alors par $(z - a_n)$, soit

$$P_n(z) = (z - a_n)P_{n-1}(z)$$

où P_{n-1} est maintenant un polynôme de degré $n - 1$.

Si $n - 1 = 0 \iff n = 1$, on a fini.
Sinon, on recommence avec P_{n-1} qui admet au moins une racine a_{n-1} et se factorise alors par

$$P_{n-1}(z) = (z - a_{n-1})P_{n-2}(z)$$

avec P_{n-2} un polynôme de degré $n - 2$.

On construit ainsi une suite de polynôme (P_n) de degré n strictement décroissante.
On arrive finalement à

$$P_n(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a1)P_0$$

où P_0 est un polynôme de degré 0, donc une constante, d'où la factorisation finale

$$P_n(z) = k(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a1)$$

et qui montre en particulier que P_n de degré n admet n racines dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement distinctes).

□

L'ensemble des nombres complexes contient ainsi de quoi résoudre toutes les équations algébriques avec des coefficients complexes : on dit que $\mathbb{C}$ **est algébriquement clos**.

On rappelle que ce résultat n'est pas évident, et est mis en défaut pour les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ en particulier :

— L'équation à coefficients entiers (dans $\mathbb{N}$) $2x = 5$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$

— L'équation algébrique à coefficients entiers (dans $\mathbb{N}$) $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$

— L'équation à coefficients réels (dans $\mathbb{R}$) $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Par contre donc, dans $\mathbb{C}$, toutes les équations algébriques ont des solutions (et en ont autant que le degré du polynôme)

4) Second degré complexe

Exercice 7 Soit un nombre complexe z tel que $z^2 = 3 + 4i$.

a) Que vaut $|z|^2$?

b) Déterminer l'écriture algébrique du nombre z recherché.

Propriété *On considère l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ de coefficients complexes a, b et c, avec $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation du second degré et δ un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$, alors les racines de l'équation sont*

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

Remarques :

- Si les coefficient de l'équation sont réels, alors Δ est aussi réel, et on peut s'intéresser aux cas $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ et $\Delta = 0$.
- Si $\Delta = 0$, alors $\delta = 0$ convient et on a deux fois la même racine : on parle d'une racine double.
- Cette propriété permet d'exprimer en un seul cas, une seule formule, tous les cas des équations du second degré, à coefficients réels ou complexes.
- Pour déterminer δ, c"est-à-dire une « racine » du discriminant Δ, on peut utliser la méthode de l'exercice 7 précédent.

Exercice 8 On considère l'équation $(E) : z^2 + 2iz - 2 = 0$

a) Développer $(z + i)^2$ et en déduire que l'équation (E) est équivalente à $(z + i)^2 - 1 = 0$.

b) En déduire les solutions de (E).

c) Déterminer directement les solutions de (E) avec la formule générale sur le second degré complexe.

Exercice 9 Résoudre les équations $(E_1) : z^2 + 3z - 4 = 0$, $(E_2) : z^2 - (1 + 2i)z + (-3 + i) = 0$, $(E_3) : z^2 - (2 - i)z + 3 - i = 0$, et $(E_4) : z^2 - (-1 + 4i)z - 5 - 5i$

Exercice 10 Soit le polynôme complexe P défini par $P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (4 - 4i)z - 8i$.

a) Montrer que $2i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

b) Démontrer que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + 2z + 4)$.

c) En déduire alors toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 11 Soit le polynôme complexe P défini par $P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$.

a) Montrer que $z_0 = i\sqrt{2}$ est une racine de P.

b) Factoriser alors P et déterminer toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

III - Racines de l'unité

Exercice 12

1. Factoriser $z^3 - 1$ et en déduire toutes les solutions de l'équation $(E) : z^3 = 1$.
2. On note j la solution de (E) dont la partie imaginaire est strictement positive.
   a) Donner la forme algébrique de j.
   b) Démontrer les égalités suivantes : $j^3 = 1$, $j^2 + j + 1 = 0$, $j^2 = \overline{j}$, $\dfrac{1}{j} = \overline{j}$

Définition *Pour un entier naturel non nul n, on appelle racine n-ième de l'unité un nombre complexe z tel que $z^n = 1$.*

On a toujours une racine n-ième évidente $z = 1$. Et les autres ?

Dans le cas $n = 2$, donc $z^2 = 1$ on connaît bien aussi, il y a deux racines 2-ième, ou racines carrées : $z = -1$ et $z = +1$.

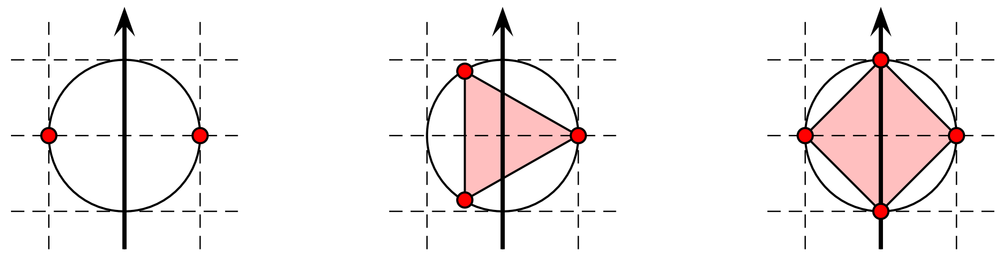
Exercice 13 Résoudre les équations $z^3 = 1$, puis $z^4 = 1$.

En écrivant plus généralement le nombre complexe 1 sous forme exponentielle : $1 = e^{i2\pi/n}$ on a alors la propriété

Propriété *L'ensemble des racines n-ième de l'unité est l'ensemble des n nombres complexes*

$$\mathcal{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \{0; 1; \dots; n-1\} \right\}$$

Ces racines sont les sommets d'un polygôme régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique :



Exercice 14

1. Déterminer l'ensemble des racines 4-ième de l'unité, noté $\mathcal{U}_4$ puis tracer le polygone dont les sommets sont ces racines. Calculer le périmètre de ce polygone.
2. Déterminer l'ensemble des racines 6-ième de l'unité, noté $\mathcal{U}_6$ puis tracer le polygone dont les sommets sont ces racines. Calculer le périmètre de cet hexagone.

Exercice 15 Écrire $a = 5 - 5i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.

En déduire un nombre complexe z tel que $z^4 = a$.

À l'aide des racines 4-ième de l'unité, donner alors toutes les solutions de l'équations $z^4 = a$.

Exercice 16

1. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$
   a) Calculer ω^5.
   b) Factoriser $\omega^5 - 1$ par $\omega - 1$.
   En déduire que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$
2. Généralisation : on pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ pour un entier naturel $n \geqslant 2$.

   Rappeler l'expression de la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \omega^k$ pour un entier $p \geqslant 1$

   En déduire que $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

IV - Binôme de Newton

Propriété *Soit a et b deux nombres complexes. Pour ttout entier naturel n, on a*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

<u>Démonstration:</u> Cette formule se démontre par récurrence sur la puissance n, en utilisant la relation de Pascal sur les coefficients binomiaux : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

On l'explique ici en utilisant du dénombrement, en détaillant le développement du produit des n facteurs

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

Chaque terme du développement s'obtient en prenant un terme, soit a soit b, par parenthèse.
On choisit donc pour k fois le a et le reste, $n-k$ fois, le b pour obtenir un un terme de la forme $a^k b^{n-k}$.

- Il n'y a qu'une façon d'obtenir le terme a^n : en choisissant le terme a dans chaque parenthèse, et donc
$$(a+b)^n = \mathbf{1}a^n + \dots$$
- Pour obtenir le terme $a^1 b^{n-1}$, il faut choisir a dans une parenthèse, il y a n possibilités, et prendre systématiquement b dans toutes les autres parenthèses, et donc
$$(a+b)^n = 1a^n + \mathbf{n}\, a^1 b^{n-1} + \dots$$
- Pour obtenir le terme $a^2 b^{n-2}$, il faut choisir a dans deux parenthèses, il y a $\binom{n}{2}$ possibilités, et prendre systématiquement b dans toutes les $n-2$ autres parenthèses. Ce terme s'écrit donc $\binom{n}{2} a^2 b^{n-2}$, et on a donc
$$(a+b)^n = 1a^n + na^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots$$
- Pour obtenir le terme $a^3 b^{n-3}$, il faut choisir a dans trois parenthèses, il y a $\binom{n}{3}$ possibilités, et prendre systématiquement b dans toutes les $n-3$ autres parenthèses.
Ce terme s'écrit donc $\binom{n}{3} a^3 b^{n-3}$.
- $\dots$

Finalement, le developpement du binôme est la somme de tous ces termes. □

<u>Remarque :</u> On a $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2$. La formule du binôme $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ est donc vraie dès que $ab = ba$, c'est-à-dire **lorsque a et b commutent**.

C'est vrai pour des nombres a et b entiers, réels, ou complexes. Ce n'est pas forcément vrai par exemple pour des matrices... Mais si A et B sont effectivement des matrices qui commutent $AB = BA$, alors on peut utiliser la formule du binôme de Newton.

<u>Rappel sur les coefficients binomiaux :</u> $\binom{n}{k}$ est le nombre de façon de choisir k éléments dans un ensemble de n éléments : choisir 4 chaussettes parmi 10, ...

Le **Triangle de Pascal** contient les coefficients binomiaux :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5			$\dots$	$\dots$		

$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = 1a + 1b$
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

— Relation de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

— Formule générale : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

— Valeurs paritulclières : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 17 Développer et simplifier l'expression $(x+1)^4 - (x-1)^4$.
En déduire la valeur exacte de $1001^4 - 999^4$.

Exercice 18

a) En utilisant la formule du binôme de Newton, écrire la forme algébrique de $(1+i)^4$.

b) Retrouver ce résultat en utilisant la forme exponentielle de $1+i$.

Exercice 19 On considère le polynôme $P(x) = (2x-3)^8$.

a) Quel est le terme de plus haut degré de P ?

b) Quel est le terme constant de P ?

c) Quel est le coefficient de x^6 dans $P(x)$?

Exercice 20 Pour quelle(s) valeur(s) du réel a le nombre complexe $(a+i)^3$ est-il imaginaire pur ?

Exercice 21 En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer les sommes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k,\ S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ et } S_3 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Exercice 22 Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

(Indice : on pourra dériver de deux manières différentes la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^n$.)

Exercice 23 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, avec a et b deux réels.
Trouver toutes les matrices carrées B qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 24 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice telle que $A = 3I_2 + B$.

Donner la matrice B, puis B^2 et B^3 puis B^n pour tout entier n. En déduire A^n pour tout entier n.

Exercice 25 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$, où I est la matrice identité.

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la matrice A^n en fonction de l'entier n.

Exercice 26 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. On note $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = A - U$.

Calculer U^n et L^n pour tout entier n. En déduire la matrice A^n en fonction de l'entier n.

Exercice 27 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et B la matrice telle que $A = I_2 + B$.

a) Calculer A^2 et A^3.

b) Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

c) Calculer B^2 et en déduire B^n pour tout entier n.

d) Exprimer alors A^n. Vérifier bien sûr la formule trouvée avec les résultats du).