Polynômes complexes - Exercices
Factorisation dans $\mathbb{C}$ et racines de l'unité

Exercice 1

a) Résoudre $z^2 - 4z - 5 = 0$. Factoriser ensuite $z^2 - 4z - 5$.

b) Résoudre $z^2 - 4z + 5 = 0$. Factoriser ensuite $z^2 - 4z + 5$.

c) Écrire $z = -1$ sous forme exponentielle. Donner alors trois nombres complexes z tels que $z^3 = -1$.

d) Écrire sous forme exponentielle $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Résoudre alors $z^2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

e) Donner 4 nombres complexes z tels que $z^4 = 1$. Écrire ces nombres sous forme exponentielle.

Exercice 2

1. Soit $P(z) = z^2 + 3z - 4$. Montrer que 1 est une racine de P et factoriser P par $z - 1$.
2. On considère l'équation $z^3 + 2z^2 - z - 2 = 0$. Vérifier que 1 est une solution, puis déterminer toutes les solutions de cette équation.
3. Soit $P(z) = 2z^3 + 3z^2 - z - 2$. Montrer que -1 est une racine puis factoriser P.
4. Soit $P(z) = z^4 - 2z^3 - z + 2$. Montrer que 1 et 2 sont racines de P puis factoriser P.
5. Soit $P(z) = -2z^2 + 3z - 2 - 3i$. Montrer que i est une racine de P et factoriser P.
6. Soit $P(z) = z^3 - 8$. Déterminer une racine réelle simple a de P, puis factoriser P.

Exercice 3

a) Factoriser $z^3 - i^3$ par $z - i$

b) Factoriser $z^4 - 1$ puis $z^5 - 1$.

Exercice 4

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z - i)(z^2 + pz + q)$.
3. Déterminer alors toutes les racines du polynôme P.

Exercice 5

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$ pour tout nombre complexe z.

b) En déduire toutes les racines dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$, du polynôme P.

Exercice 6

Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 3z^3 + (1 + 6i)z^2 + 2(8 + i)z + 32i$.

a) Vérifier que $z_0 = -2i$ est une racine de P.

b) En déduire une factorisation de P, et déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 7

Soit un nombre complexe z tel que $z^2 = 3 + 4i$.

a) Que vaut $|z|^2$?

b) Déterminer l'écriture algébrique du nombre z recherché.

Exercice 8 On considère l'équation $(E) : z^2+2iz-2=0$

a) Développer $(z+i)^2$ et en déduire que l'équation (E) est équivalente à $(z+i)^2-1=0$.

b) En déduire les solutions de (E).

c) Déterminer directement les solutions de (E) avec la formule générale sur le second degré complexe.

Exercice 9 Résoudre les équations $(E_1) : z^2+3z-4=0$, $(E_2) : z^2-(1+2i)z+(-3+i)=0$, $(E_3) : z^2-(2-i)z+3-i=0$, et $(E_4) : z^2-(-1+4i)z-5-5i$

Exercice 10 Soit le polynôme complexe P défini par $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(4-4i)z-8i$.

a) Montrer que $2i$ est une solution de l'équation $P(z)=0$.

b) Démontrer que $P(z)=(z-2i)(z^2+2z+4)$.

c) En déduire alors toutes les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Exercice 11 Soit le polynôme complexe P défini par $P(z)=z^3-(2+i\sqrt{2})z^2+2(1+i\sqrt{2})z-2i\sqrt{2}$.

a) Montrer que $z_0=i\sqrt{2}$ est une racine de P.

b) Factoriser alors P et déterminer toutes les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Exercice 12

1. Factoriser z^3-1 et en déduire toutes les solutions de l'équation $(E) : z^3=1$.
2. On note j la solution de (E) dont la partie imaginaire est strictement positive.
   a) Donner la forme algébrique de j.
   b) Démontrer les égalités suivantes : $j^3=1$, $j^2+j+1=0$, $j^2=\overline{j}$, $\dfrac{1}{j}=\overline{j}$

Exercice 13 Résoudre les équations $z^3=1$, puis $z^4=1$.

Exercice 14

1. Déterminer l'ensemble des racines 4-ième de l'unité, noté $\mathcal{U}_4$ puis tracer le polygone dont les sommets sont ces racines. Calculer le périmètre de ce polygone.
2. Déterminer l'ensemble des racines 6-ième de l'unité, noté $\mathcal{U}_6$ puis tracer le polygone dont les sommets sont ces racines. Calculer le périmètre de cet hexagone.

Exercice 15 Écrire $a=5-5i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.
En déduire un nombre complexe z tel que $z^4=a$.
À l'aide des racines 4-ième de l'unité, donner alors toutes les solutions de l'équations $z^4=a$.

Exercice 16

1. On pose $\omega=e^{i\frac{2\pi}{5}}$
   a) Calculer ω^5.
   b) Factoriser ω^5-1 par $\omega-1$.
   En déduire que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$
2. Généralisation : on pose $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ pour un entier naturel $n\geqslant 2$.
   Rappeler l'expression de la somme $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\omega^k$ pour un entier $p\geqslant 1$
   En déduire que $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$.

Exercice 17 Développer et simplifier l'expression $(x+1)^4-(x-1)^4$.
En déduire la valeur exacte de 1001^4-999^4.

Exercice 18

a) En utilisant la formule du binôme de Newton, écrire la forme algébrique de $(1+i)^4$.

b) Retrouver ce résultat en utilisant la forme exponentielle de $1+i$.

Exercice 19 On considère le polynôme $P(x)=(2x-3)^8$.

a) Quel est le terme de plus haut degré de P ?

b) Quel est le terme constant de P ?

c) Quel est le coefficient de x^6 dans $P(x)$?

Exercice 20 Pour quelle(s) valeur(s) du réel a le nombre complexe $(a+i)^3$ est-il imaginaire pur ?

Exercice 21 En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer les sommes
$$S_1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k,\ S_2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \text{ et } S_3=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}.$$

Exercice 22 Calculer la somme $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

(Indice : on pourra dériver de deux manières différentes la fonction f définie par $f(x)=(1+x)^n$.)

Exercice 23 Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, avec a et b deux réels.
Trouver toutes les matrices carrées B qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB=BA$.

Exercice 24 Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice telle que $A=3I_2+B$.
Donner la matrice B, puis B^2 et B^3 puis B^n pour tout entier n. En déduire A^n pour tout entier n.

Exercice 25 Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=A-I_3$, où I est la matrice identité.
Calculer B^n pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire la matrice A^n en fonction de l'entier n.

Exercice 26 Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. On note $U=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L=A-U$.
Calculer U^n et L^n pour tout entier n. En déduire la matrice A^n en fonction de l'entier n.

Exercice 27 Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et B la matrice telle que $A=I_2+B$.

a) Calculer A^2 et A^3.

b) Calculer la somme $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

c) Calculer B^2 et en déduire B^n pour tout entier n.

d) Exprimer alors A^n. Vérifier bien sûr la formule trouvée avec les résultats du).