Plan complexe

Mathématiques expertes
Terminale générale

Géométrie complexe et applications

« en géométrie, le plus court chemin entre les éléments
réels passe souvent par un détour dans l'imaginaire »,

Jean Gaston Darboux (1842 - 1917)

Table des matières

I - Échauffements

Exercice 1 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal,

a) Placer les points $A(2;4)$ et $B(-3,5)$.

b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et la longueur AB.

c) Calculer les coordonnées du milieu de $[AB]$.

d) On note A' et A'' les symétriques de A respectivement par rapport à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées. Donner les coordonnées de A' et A''.

e) Déterminer les coordonnées des points M tels que $AM = BM$. Tracer ces points.

Exercice 2 Tracer le cercle trigonométrique et placer sur ce cercle les points associés aux angles

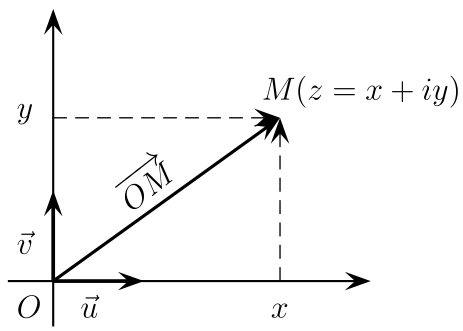
$$\pi, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{6}$$

Donner pour chaque angle les valeurs exactes de leur cosinus et sinus.

Exercice 3 Simplifier : $A = e^2e^5$, $\quad B = e^{2x}e2 + 3x$, $\quad C = \dfrac{\left(e^{3x}\right)^2 e^{-2x}}{e^x}$, $\quad D = e^x \dfrac{\dfrac{\left(e^{2x}\right)^3}{e^{8x+1}}}{e^x}$

II - Plan complexe

Définition ***Plan complexe***
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct.
À tout nombre complexe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées $M(x;y)$.
*On dit que z est l'**affixe** du point M, ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$; et que le point M, ou le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image de z.*



Définition *Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc* **axe réel**.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, $z = 0 + iy = iy$ est appelé un nombre **imaginaire pur**. *Les images de ces nombres sont les points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc* **axe imaginaire (pur)**.

Dans le plan complexe, si le point M a pour affixe z, alors l'image M' de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 4 Placer les points A, B et C d'affixe respectif : $z_A = -1 - 2i$, $z_B = 4 - i$ et $z_C = \sqrt{2} + \dfrac{3}{2}i$.
Déterminer les longueurs OA, OB et OC et AB.

Exercice 5 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Z = z^2 + \overline{z}$ soit réel.

Propriété

- *Soit deux points A et B d'affixe z_A et z_B, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.*
- *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe z et z', alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z+z'$.*
- *Pour $k \in \mathbb{R}$, le vecteur $k\vec{u}$ a pour affixe kz.*
- *Le milieu I de $[MN]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2}$*

Exercice 6 Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2+i$, $3+3i$, $1+\dfrac{11}{5}i$.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C sont alignés.

c) Placer les points A, B et C.

Exercice 7 Les points A, B et C ont pour affixe respective $1+\dfrac{1}{2}i$, $\dfrac{3}{2}+2i$ et $-1-\dfrac{11}{2}i$.
Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 8 On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 3+i \ , \quad z_B = 2-2i \ , \quad z_C = 2i \ \text{ et } \ z_D = 1+5i.$$

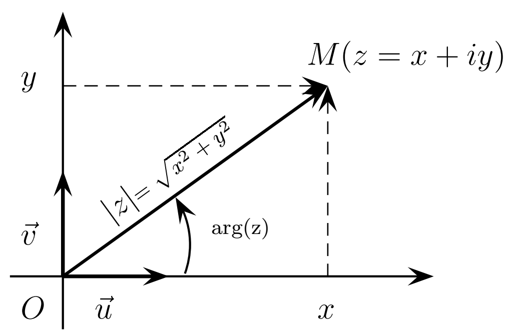
Faire une figure, puis montrer de deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

III - Module et argument d'un nombre complexe

Définition *Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = x+iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.*

Alors, $OM = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$. Ce nombre, **réel et positif**, *s'appelle* **le module** *du nombre complexe z, et est noté $|z| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$.*

On appelle **argument** *du nombre complexe non nul z, noté $arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.*



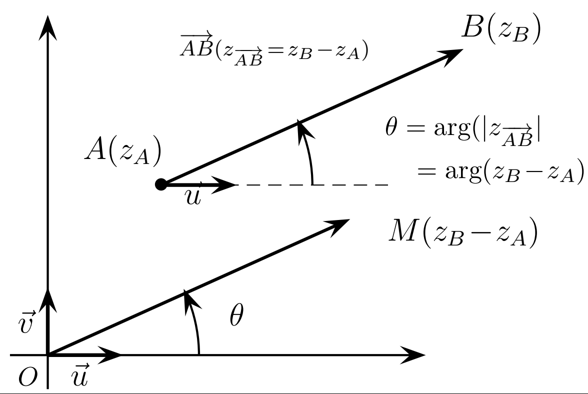
Remarque : Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments : si θ est un de ces arguments, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\arg(z) = \theta \ [2\pi]$, qui signifie exactement que $\arg(z) = \theta + k2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9 Placer les points dont les affixes sont les complexes suivants, puis en calculer le module et déterminer un argument : $z_1 = 2+2i$, $z_2 = 5$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -6$, $z_5 = -1+i$, $z_6 = \sqrt{3}+i$.

Propriété *Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et donc,*

- *$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_a|$*
- *$\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = arg(z_B - z_A)$.*



Corollaire *Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ alors*

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(z_{\overrightarrow{CD}}\right) - \arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

<u>Démonstration:</u> En utilisant la relation de Chasles pour les angles orientés

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{CD}\right) \\ &= -\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{CD}\right) \\ &= -\arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right) + \arg\left(z_{\overrightarrow{CD}}\right) \\ &= -\arg\left(z_B - z_A\right) + \arg\left(z_D - z_C\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\end{aligned}$$

On démontrera la dernière égalité, l'argument du quotient, un peu plus tard. □

Exercice 10 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1 + i\ ,\ z_B = 4 + 5i\ ,\ z_C = 5 - 2i\ .$$

1. Montrer que $AB = AC$, puis que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.
3. a) Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
   b) Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Propriété *Pour tous nombres complexes z et z' :*

- *si $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$*
- $|-z| = |z|$ • $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ • $|z^n| = |z|^n$ • $\dfrac{|z|}{|z'|} = \left|\dfrac{z}{z'}\right|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire)*

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

• $|z - 6i| = 3$ • $|z + 3 - 2i| < 2$ • $|z + 2| = |z - 3i + 1|$ • $|2 - iz| = |z + 5|$ • $\left|\dfrac{z + 2i}{z + 1 - 2i}\right| > 1$

• $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$ • $|z - 3| = |z + 2i|$ • $|z + 1 - 2i| < \sqrt{5}$ • $\left|\overline{z} + \dfrac{i}{2}\right| = 4$ • $\arg(z + i) = \pi$

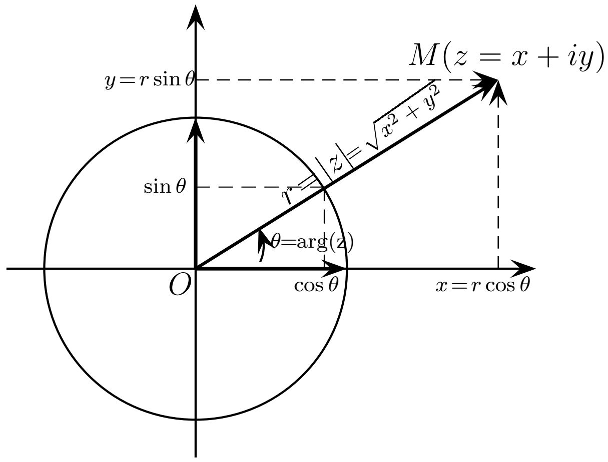
Exercice 12 Soit A, B et C les trois points d'affixes $z_A = 2i$, $z_B = 2 + i$ et $z_C = 1 - i$.
Montrer, de deux manières différentes, que ABC est un triangle rectangle en B.

IV - Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition *Dans le plan complexe un point M peut-être repéré par ses coordonnées cartésienne $(x;y)$, ou son affixe complexe $z = x+iy$, ou par ses coordonnées polaires $(r;\theta)$, avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{u};\overrightarrow{OM})$.*

On a les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r}\ ,\ \sin\theta=\dfrac{y}{r}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{array}\right.$$



L'affixe z du point M s'écrit alors,

$$z = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$$

Cette écriture est la **forme trigonométrique** *de z.*

Exercice 13 Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3$
- $z_2 = -4$
- $z_3 = 2i$
- $z_4 = -1+i$
- $z_5 = -\sqrt{3}+i$
- $z_6 = -17$
- $z_7 = -6\sqrt{3}+6i$
- $z_8 = 5i$
- $z_9 = \sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

V - Exponentielle complexe

On considère la fonction complexe f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. Comme les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi, et,

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos\theta = i(i\sin\theta+\cos\theta) = if(\theta)$$

Comme de plus, $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$, on en déduit que f est définie de manière unique par l'expression $f(\theta) = e^{i\theta}$.

Propriété *Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,* $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.}$

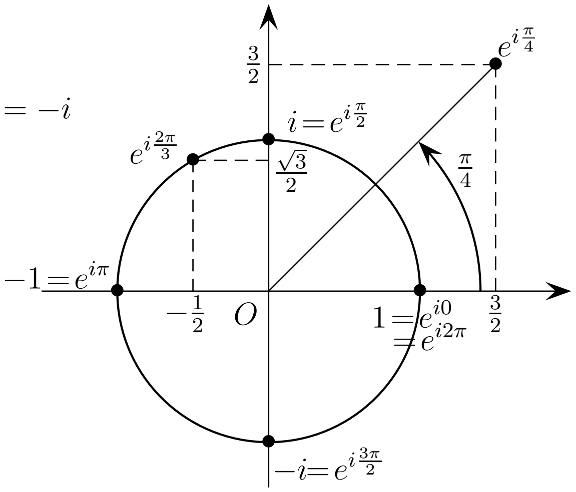
Ainsi, tout complexe z s'écrit sous la forme exponentielle complexe :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

où, $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$.

<u>Exemples :</u>

- $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$



Exercice 14 Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

- $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$
- $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$
- $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
- $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$
- $2e^{i\frac{\pi}{4}}\,e^{-i\frac{3\pi}{2}}$
- $\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

Exercice 15 Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

- 5
- $4+4i$
- $\dfrac{3}{2}i$
- $\dfrac{2}{1-i}$
- $\sqrt{3}-i$
- $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$
- $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$

Propriété *Pour tous réels θ et θ', et tout entier naturel n,*

- $|e^{i\theta}|=1$, *et* $arg(e^{i\theta})=\theta$
- $e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ *(Formule de Moivre)*
  c'est-à-dire, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$
- $e^{i\theta}=e^{i\theta'} \iff \theta=\theta'\ [2\pi]$

Corollaire *Pour tous nombres complexes z et z',*

- $arg(zz')=arg(z)+arg(z')$
- $arg(z^n)=n\,arg(z)$
- $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=arg(z)-arg(z')$

<u>Démonstration :</u> Soit $z=re^{i\theta}$, $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)$, et $z'=r'e^{i\theta'}$, $r'=|z'|$ et $\theta'=\arg(z')$, alors, $zz'=rr'e^{i(\theta+\theta')}$, et donc, $|zz'|=rr'=|z||z'|$, et $\arg(zz')=\theta+\theta'=\arg(z)+\arg(z')$.

De même pour la puissance : $z^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^n\left(e^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$, et donc, $|z^n|=r^n=|z|^n$ et $\arg(z^n)=n\theta=n\arg(z)$

Exercice 16 On donne $z_1=e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2=3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3=\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1z_2z_3$, $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$, z_2^2, z_3^6.

Exercice 17 Simplifier l'expression, où $\theta\in\mathbb{R}$, $\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$.

Etait-ce prévisible sans calcul ?

Propriété ***Formules d'Euler*** $\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Exercice 18 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- $\arg(z-3)=\dfrac{\pi}{3}$
- $\arg(-2z)=\dfrac{\pi}{4}$
- $\arg((1+i)z)=0$
- $\arg\left(\dfrac{1}{iz}\right)=\pi$
- $|z-2i|=3$
- $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2i}\right)=\dfrac{\pi}{2}$
- $|z+1|=|z-2i|$
- $|z+1-i|=\sqrt{2}$

Exercice 19 Ecrire le nombre complexe $(\sqrt{3}-i)^{10}$ sous forme algébrique.

Exercice 20 Calculer le module et un argument des complexes suivants, puis les écrire sous formes trigonométrique, exponentielle et algébrique :

$$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1+i)} \qquad\qquad z_2=\frac{5(-1+i)}{\sqrt{3}+i}$$

Exercice 21

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=1-i$, et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z, et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 22

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1=-1-i$, $z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, et $Z=z_1z_2$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 23

On considère l'équation $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où θ est un réel donné dans $[0;2\pi[$.

a) Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta=-4\sin^2(\theta)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée, en discutant suivant les valeurs de θ, en donnant les solutions sous formes exponentielle.

Exercice 24

Ecrire sous forme exponentielle les solutions de : $z^2-2z\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=0$.

Exercice 25

a) Donner sous forme exponentielle les solutions de l'équation : $z^2+z+1=0$.

b) Soit α un réel donné. Factoriser l'expression : $z^2-e^{2i\alpha}$.

c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4+z^2+1=0$.

Exercice 26

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+4z^2-21=0$.

Exercice 27

On considère l'équation du second degré (E) : $z^2+(1+i\sqrt{3})z-1=0$.

1. Déterminer le discriminant Δ de cette équation. Écrire Δ sous forme exponentielle.
2. Donner un nombre complexe δ tel que $\delta^2=\Delta$. Écrire δ sous forme algébrique.
3. Vérifier que les formules usuelles du second degré, $z_1=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ donnent bien deux solutions de (E).

Exercice 28

(Formules trigonométriques) Soit θ et θ' deux réels quelconques.

En exprimant de deux manières différentes le complexe $e^{i\theta}e^{i\theta'}$, exprimer $\cos(\theta+\theta')$ et $\sin(\theta+\theta')$ en fonction des cosinus et sinus de θ et θ'.

Exprimer de la même façon $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

Propriété *Pour tous réels a et b,*

Formules d'addition

- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

Formules de duplication

- $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1$
- $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

Exercice 29 En utilisant la notation exponentielle complexe et/ou les formules trigonométriques, exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les valeurs de :

- $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$
- $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$
- $\cos\left(x+\pi\right)$
- $\sin\left(x+\pi\right)$
- $\cos\left(\pi-x\right)$
- $\sin\left(\pi-x\right)$

Exercice 30

1. a) Calculer $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

   b) Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\dfrac{\pi}{6}=2\times\dfrac{\pi}{12}$.

2. Exprimer $\dfrac{5\pi}{12}$ en fonction de $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 31

1. x est un nombre réel. Ecrire la forme algébrique et la forme exponentielle de $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)e^{ix}$.
2. Utiliser la question précédente pour résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}$.

Exercice 32 **Factorisation par l'angle moitié.**

a) Factoriser e^2x dans la somme e^x+e^{3x}.

b) Résoudre alors dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation : $\cos(x)+\cos(3x)=0$.

c) Résoudre de la même façon, dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, l'équation : $\sin(2x)+\sin(6x)=0$.