# Nombres complexes

Mathématiques expertes
Terminale générale

## Table des matières

# I - Échauffements

### Exercice 1

1. Développer, réduire et ordonner les expressions : $A = (2 - 3x) + (-4 + 2x)$

   $B = (-5 + 2x) - (3 - x)$ $\quad C = (2 + x)(3 - x)$ $\quad D = (5 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$ $\quad E = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$
2. Écrire sans racine carrée au dénominateur $F = \dfrac{2}{2 + \sqrt{3}}$ $\quad G = \dfrac{1 + 2\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$ $\quad H = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$
3. Résoudre : $E_1 : 5x + \dfrac{1}{5} = 3x + \dfrac{1}{3}$ $\quad E_2 : 2x + 2 = \sqrt{2}$ $\quad E_3 : x^2 + 3x - 4 = 0$ $\quad E_4 : x^2 + x + 1 = 0$

# II - Introduction - Ensembles de nombres

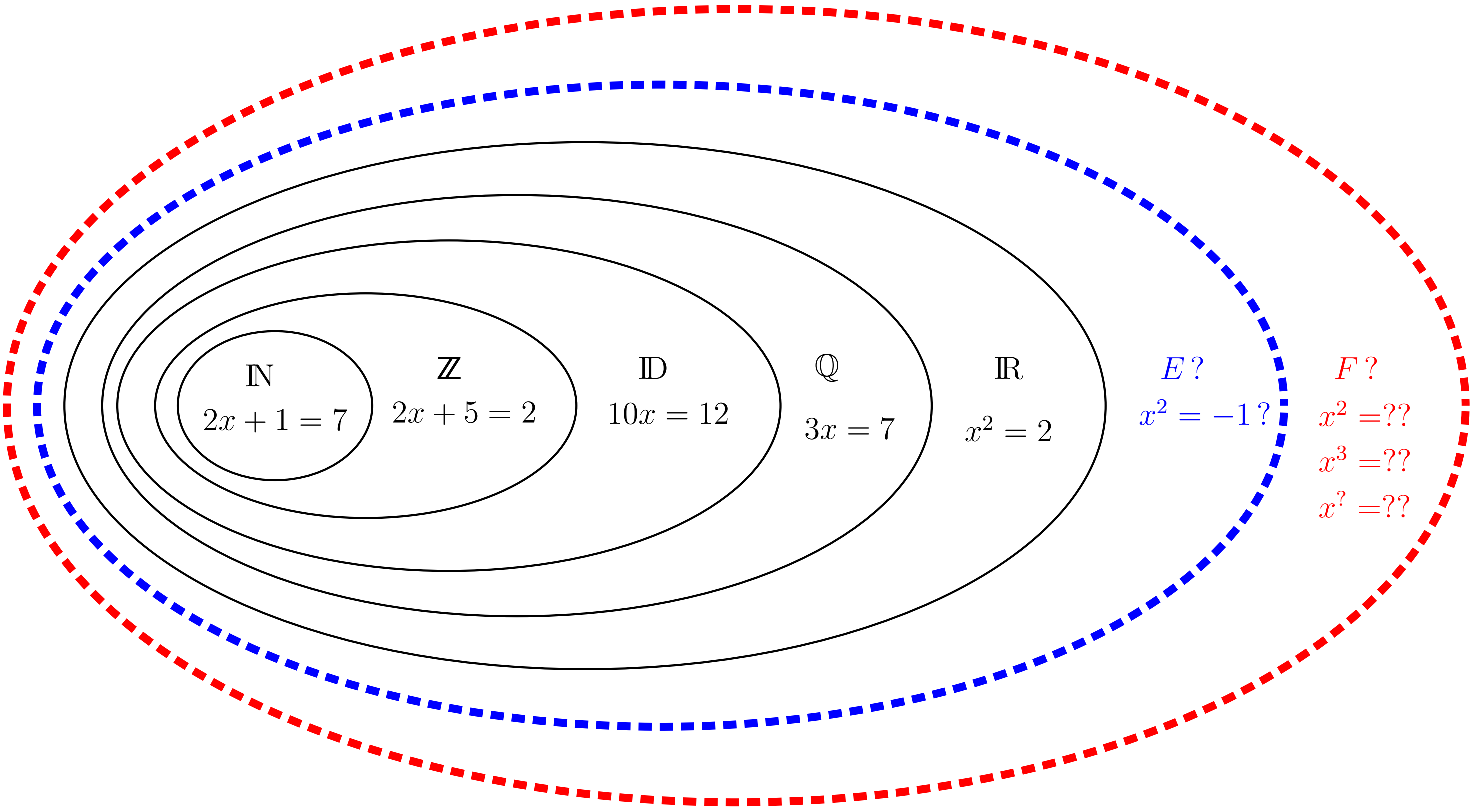
## 1) Des équations

### Exercice 2

1. Résoudre l'équation $x^2 = 16$.
2. Résoudre l'équation $x^2 = 2$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2 = 36$
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 36$
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 2$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 2$
7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2 = 2$. Et dans $\mathbb{Z}$ ? et dans $\mathbb{Q}$ ?
8. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2 = -1$. Et dans $\mathbb{R}$ ? et dans ... ?
9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = 0$
10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$
11. Supposons que $i$ est un nombre qui vérifie $i^2 = -1$. Résoudre alors l'équation précédente en exprimant les solutions à l'aide de ce nombre.

## 2) Des ensembles de nombres qui permettent de résoudre des équations

Chaque ensemble de nombres permet de résoudre un ensemble d'équations.




## 3) ...et des solutions à imaginer

Considérons le trinôme du second degré $P(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+1$.

Son discriminant est : $\Delta=-1<0$, donc $P$ n'a pas de racine réelle (donc non plus entière, rationnelle,...). Le discriminant n'est le carré d'aucun nombre réel. **Imaginons** un instant que l'on connaisse un nombre dont ce discriminant est le carré, un nombre $i$ tel que $i^2=\Delta=-1$ ou encore tel que $i=\sqrt{\Delta}=\sqrt{-1}$.

Les formules bien connues pour le second degré donne**raient** alors

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=1+\sqrt{-1}\ ;\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=1-\sqrt{-1}$$

soit avec le nombre $i$ qu'on imagine jusque là

$$x_1=1+i\ ;\quad x_2=1-i$$

Maintenant, si on fait le calcul :

$$\begin{aligned} P(x_1) &= \frac{1}{2}(1+i)^2-(1+i)+1 \\ &= \frac{1}{2}\left(1^2+2i+i^2\right)-1-i+1 \\ &= \frac{1}{2}(1+2i-1)-i \\ &= 0 \end{aligned}$$

et cela marche donc ! on a bien des racines (à vérifier aussi pour $x_2$ et $P(x_2)$) du trinôme $P$.

Seul problème, le nombre $i$ introduit, imaginé, et utilisé **n'existe pas réellement** : ce n'est pas un nombre réel...
Cardan, mathématicien du XVIème siècle appelait ce type de nombres des nombres « impossible », puis ceux comme $x_1 = 1 + \sqrt{-1}$ des nombres « sophistiqués »
Plus tard, Descartes leur donna le nom de nombre « imaginaire », qui sont devenus aujourd'hui des nombres complexes.

## 4) Petits rappels historiques et chronologiques

C'est au XVIème siècle que les mathématiciens s'attaquent fortement aux équations algébriques, c'est à dire aux racines de polynômes. D'abord du 2nd degré, puis du 3ème, ...

Pour rappel, l'introduction des racines carrées, depuis Pythagore depuis 2000 ans n'a pas été des plus faciles, et même l'introduction bien plus récemment des quantités négatives en occident est restée difficile. De nombreux mathématiciens de l'époque distinguent difficilement le zéro relatif du zéro absolu en dessous duquel rien n'existe.

René Descartes (1596 - 1650) place ses axes de façon qu'ils n'aient pas à faire intervenir de coordonnées négatives.

Le mathématicien et ingénieur Lazare Carnot (1753 - 1823) en dit, au sujet des nombres négatifs,

> « *Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?* »

puis conclut sans ménagement :

> « *L'usage des nombres négatifs conduit à des conclusions erronées.* »

Le mathématicien Maclaurin (1698 - 1746) exprime en 1742 dans son « Traité des Fluxions » ce doute qui plane encore sur les quantités négatives :

> « *L'usage du signe négatif en algèbre donne lieu à plusieurs conséquences qu'on a d'abord peine à admettre et ont donné l'occasion à des idées qui paraissent n'avoir aucun fondement réel.* »

L'histoire s'est donc seulement répétée depuis Pythagore qui, face à l'équation $x^2 = 2$, ne trouvait pas de solution avant que des mathématiciens n'arrive en proposant simplement de noter ce « nombre imaginaire » pour l'époque $\sqrt{2}$. On aurait tout aussi bien pu le noter $i$, ou $d$,...

Maintenant, armés de nos nombres réels (et de tous les autres ensembles qui y sont inclus), faisons de même avec l'équation $x^2 = -1$ et notons « ce nombre imaginaire » $i$...et voyons où cela nous mène...

# III - Ensemble des nombres complexes

## 1) Définitions

**Théorème** *Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé* **ensemble des nombres complexes**, *qui possède les propriétés suivantes :*

- *$\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$*
- *il existe élément de $\mathbb{C}$, noté $i$ tel que $i^2 = -1$.*
- *tout nombre complexe $z$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, où $x$ et $y$ sont des nombres réels.*

Exemples : $z = 3 + 2i \in \mathbb{C}$; $z_2 = -5 \in \mathbb{R}$, donc $z_2 \in \mathbb{C}$; $z_3 = \sqrt{7} - 6i \in \mathbb{C}$; ...

**Définition** *L'écriture $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ s'appelle la* **forme algébrique** *du nombre complexe $z$.*

- *$x$ est la partie réelle de $z$, notée $\mathcal{R}e(z)$,*
- *$y$ est la partie imaginaire de $z$, notée $\mathcal{I}m(z)$*

Exemples : Pour $z = 3 - 2i$, on a $\mathcal{R}e(z) = 3$ et $\mathcal{I}m(z) = -2$.
Pour $z = 5i$, on a $\mathcal{R}e(z) = 0$ et $\mathcal{I}m(z) = 5$. On dit ici que $z$ est **imaginaire pur**.

D'après le premier théorème et l'unicité de l'écriture sous forme algébrique, on a donc :

**Corollaire** *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec $a$, $b$, $a'$ et $b'$ quatre nombres réels, alors,*

$$z = z' \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & a' \\ b & = & b' \end{array} \right.$$

## 2) Opérations algébriques sur les nombres complexes

**Propriété** *L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$*

**Exercice 3** Exprimer sous forme algébrique et donner les parties réelle et imaginaire des nombres complexes : $z_1 = (2 + 3i) + (-1 + 6i)$ $z_2 = (5 + i) - (3 - 2i)$ $z_3 = (1 + i)(3 - 2i)$ $z_4 = (4 + i)(-5 + 3i)$ $z_5 = (2 - i)^2$ $z_6 = (x + iy)(x' + iy')$ $z_7 = (x + iy)^2$ $z_8 = (2 - 3i)(2 + 3i)$ $z_9 = (a + ib)(a - ib)$

**Exercice 4**

a) Déterminer les réels $x$ et $y$ tels que
$E_1 : (3 - 2x) + i(5x + 2y) = 1 - 2i$ $E_2 : (x + y) + i(2x - y - 2) = 0$

b) Déterminer les nombres complexes $z$, sous forme algébrique, tels que
$E_3 : 2z + i = 4 + 2i$ $E_4 : 3z + 5 = iz - 2$ $E_5 : -2z + 2i = 2iz + 4$

## 3) Inverse d'un nombre complexe

**Propriété** *Tout nombre complexe non nul $z$ admet un inverse, noté $\dfrac{1}{z}$.*

Démonstration: Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, c'est-à-dire $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

avec $x^2 + y^2 \neq 0$ □

**Exercice 5** Écrire sous forme algébrique les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{2}{2 + i}$ $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3} + 2i}$ $z_3 = \dfrac{1 + 4i}{1 - \sqrt{2}i}$ $z_4 = \dfrac{2 + i}{1 - i} + (-1 + 3i)^2$ $z_5 = i^3$ $z_6 = \dfrac{1}{i}$ $z_7 = i^4$ $z_8 = i^5$ $z_9 = i^6$
Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{Z}$, $z_n = i^n$

**Exercice 6** Résoudre dans $\mathbb{C}$ en donnat les solutions sous forme algébrique :
$E_1 : 2z + 3i = iz + 2$ $E_2 : z(z + 1) = 2i(z + 1)$ $E_3 : iz + 3 = 3z + i$

**Exercice 7** Soit $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$Z_1 = z_1^2 - 2z_2 \qquad Z_2 = z_1 z_2^2 \qquad Z_3 = \frac{z_1}{z_2} \qquad Z_4 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$$

## 4) Conjugué d'un nombre complexe

**Définition** *Soit $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, un nombre complexe.*
*On appelle* **conjugué** *de $z$, noté $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.*

Exemples : • $z = 3 + 2i$, alors $\overline{z} = 3 - 2i$. • $\overline{3 - \frac{1}{2}i} = 3 + \frac{1}{2}i$ $\overline{-5} = -5$ $\overline{3i} = -3i$

**Propriété**

- *si $z = x + iy$, alors $z\overline{z} = x^2 + y^2$*
- $\overline{\overline{z}} = z$ • $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ • $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ • $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- *si $z \neq 0$,* $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ • *si $z' \neq 0$,* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z)$ *et donc, $z$ imaginaire pur* $\iff \mathcal{R}e(z) = 0 \iff z = -\overline{z}$
- $z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$, *et donc,* $z \in \mathbb{R} \iff \mathcal{I}m(z) = 0 \iff z = \overline{z}$

**Exercice 8** Soit les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{3 - i}{5 + 7i}$ et $z_2 = \dfrac{3 + i}{5 - 7i}$ .
Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$, et en déduire que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.
Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

**Exercice 9** Soit $P$ le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

a) Montrer que pour tout complexe $z$, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
b) Vérifier que $1 + i$ est une racine de $P$, et en déduire une autre racine complexe de $P$.

**Exercice 10** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
a) $5\overline{z} = 4 - i$ b) $(1 + i)\overline{z} + 1 - i = 0$ c) $3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i$

**Exercice 11** Montrer que l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$ admet quatre solutions dans $\mathbb{C}$.

# IV - Équations du second degré

**Propriété** *Pour $a$ un nombre réel, les solutions de l'équation $z^2 = a$ sont appelées racines carrées de $a$ dans $\mathbb{C}$, avec*

- *si $a \geq 0$, alors $z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$ (deux racines réelles)*
- *si $a < 0$, alors $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$ (deux racines complexes, imaginaires pures)*

Démonstration: • Si $a \geq 0$, alors $z^2 = a \iff (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0$, d'où les racines de l'équation.

• Si $a < 0$, $z^2 = a \iff z^2 - i^2(-a) = z^2 - i^2(\sqrt{-a})^2 = 0 \iff (z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) = 0$, d'où les racines complexes. □

Exemples : Les racines carrées de 2 dans $\mathbb{C}$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, qui sont réelles ; les racines carrées de $-4$ dans $\mathbb{C}$ sont $i\sqrt{4} = 2i$ et $-i\sqrt{4} = -2i$.

**Exercice 12** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : a) $z^2 = 10$ b) $z^2 = -16$
c) $z^2 + 10 = 0$ d) $(z^2 + 4)(z^2 - 4) = 0$ e) $z^4 - 16 = 0$ f) $z^4 = 4$

**Propriété** *L'équation $az^2+bz+c=0$, où $a\neq 0$, $b$ et $c$ sont trois réels, de discriminant $\Delta=b^2-4ac$ admet :*

- *si $\Delta=0$, une solution réelle double $z_0=-\dfrac{b}{2a}$*
- *si $\Delta>0$, deux solutions réelles distinctes $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.*
- *si $\Delta<0$, deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \ , \ z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

*Dans tous les cas, le trinôme du second degré se factorise par (avec éventuellement $z_1=z_2$) :*

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$$

**Exercice 13** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a) $z^2+z+1=0$ b) $z^2-3z+18=0$ c) $z^2+9z-4=0$ d) $-z^2+(1+\sqrt{3})z-\sqrt{3}=0$
e) $z^4+4z^2-21=0$ f) $z^2-\overline{z}+\frac{1}{4}=0$ g) $z^2-3\overline{z}+2=0$ h) $\dfrac{2z^2+2}{3}=z$ k) $z+\dfrac{1}{z}=1$

**Exercice 14** Factoriser les polynômes : a) $P(z)=z^2-4$ b) $P(z)=z^2+1$ c) $P(z)=z^2+16$
d) $P(z)=z^2-4z+5$ e) $P(z)=z^2+3z+2$ f) $P(z)=z^4-1$ g) $P(z)=2z^2+z+1$

# V - Exercices

**Exercice 15** Déterminer deux nombres dont la somme et le produit valent 2.

**Exercice 16** Résoudre l'équation $z^2=\overline{z}$.
On notera par la suite $z_0$ la solution de cette équation dont la partie imaginaire est strictement positive.

a) Montrer que $z_0\overline{z_0}=1$
b) Donner la forme algébrique de $z_0$, $z_0^2$ et $z_0^3$.
c) Démontrer que, pour tout entier $n$, $z_0^{3n}=1$.
d) En déduire les valeurs de $z_0^{3n+1}$ et $z_0^{3n+2}$ pour tout entier $n$.
e) En déduire les valeurs de $z_0^{999}$ et $z_0^{2000}$.

**Exercice 17** On considère la fonction $f$ définie pour tout nombre complexe $z\neq-1$ par l'expression $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$.

1. Déterminer la forme algébrique des images par $f$ de : a) $i$ b) $i+2$
2. Déterminer la forme algébrique du ou des antécédents de $1+i$.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de $f$, c'est-à-dire les nombres $z$ tels que $f(z)=z$.