Nombres complexes - Exercices

Mathématiques expertes
Terminale générale

I - Échauffements

Exercice 1

1. Développer, réduire et ordonner les expressions : $A = (2-3x)+(-4+2x)$
   $B = (-5+2x)-(3-x)$ $\quad C = (2+x)(3-x)$ $\quad D = (5+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$ $\quad E = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$
2. Écrire sans racine carrée au dénominateur $F = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$ $\quad G = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ $\quad H = \dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$
3. Résoudre : $E_1 : 5x+\dfrac{1}{5} = 3x+\dfrac{1}{3}$ $\quad E_2 : 2x+2=\sqrt{2}$ $\quad E_3 : x^2+3x-4=0$ $\quad E_4 : x^2+x+1=0$

II - Équations et ensembles de nombres

Exercice 2

1. Résoudre l'équation $x^2 = 16$.
2. Résoudre l'équation $x^2 = 2$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2 = 36$
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 36$
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 2$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 2$
7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2 = 2$. Et dans $\mathbb{Z}$? et dans $\mathbb{Q}$?
8. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2 = -1$. Et dans $\mathbb{R}$? et dans ... ?
9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{2}x^2+2x+1=0$
10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{2}x^2+x+1=0$
11. Supposons que i est un nombre qui vérifie $i^2=-1$. Résoudre alors l'équation précédente en exprimant les solutions à l'aide de ce nombre.

Exercice 3 Exprimer sous forme algébrique et donner les parties réelle et imaginaire des nombres complexes : $z_1 = (2+3i)+(-1+6i)$ $\quad z_2 = (5+i)-(3-2i)$ $\quad z_3 = (1+i)(3-2i)$ $\quad z_4 = (4+i)(-5+3i)$
$z_5 = (2-i)^2$ $\quad z_6 = (x+iy)(x'+iy')$ $\quad z_7 = (x+iy)^2$ $\quad z_8 = (2-3i)(2+3i)$ $\quad z_9 = (a+ib)(a-ib)$

Exercice 4

a) Déterminer les réels x et y tels que
   $E_1 : (3-2x)+i(5x+2y) = 1-2i$ $\quad E_2 : (x+y)+i(2x-y-2)=0$

b) Déterminer les nombres complexes z, sous forme algébrique, tels que
   $E_3 : 2z+i = 4+2i$ $\quad E_4 : 3z+5 = iz-2$ $\quad E_5 : -2z+2i = 2iz+4$

Exercice 5 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{2}{2+i}$ $\quad z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}+2i}$
$z_3 = \dfrac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$ $\quad z_4 = \dfrac{2+i}{1-i}+(-1+3i)^2$ $\quad z_5 = i^3$ $\quad z_6 = \dfrac{1}{i}$ $\quad z_7 = i^4$ $\quad z_8 = i^5$ $\quad z_9 = i^6$
Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{Z}$, $z_n = i^n$

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ en donnant les solutions sous forme algébrique :

$$E_1 : 2z+3i = iz+2 \qquad E_2 : z(z+1) = 2i(z+1) \qquad E_3 : iz+3 = 3z+i$$

Exercice 7 Soit $z_1=-1+2i$ et $z_2=1-i$. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$Z_1=z_1^2-2z_2 \qquad Z_2=z_1z_2^2 \qquad Z_3=\frac{z_1}{z_2} \qquad Z_4=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$$

Exercice 8 Soit les nombres complexes : $z_1=\dfrac{3-i}{5+7i}$ et $z_2=\dfrac{3+i}{5-7i}$.

Vérifier que $z_1=\overline{z_2}$, et en déduire que z_1+z_2 est réel et que z_1-z_2 est imaginaire pur.

Calculer z_1+z_2 et z_1-z_2.

Exercice 9 Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z)=z^3+z^2-4z+6$.

a) Montrer que pour tout complexe z, $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

b) Vérifier que $1+i$ est une racine de P, et en déduire une autre racine complexe de P.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

a) $5\overline{z}=4-i$ b) $(1+i)\overline{z}+1-i=0$ c) $3\overline{z}-2iz=5-3i$

Exercice 11 Montrer que l'équation $z^2-3\overline{z}+2=0$ admet quatre solutions dans $\mathbb{C}$.

III - Équations du second degré

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : a) $z^2=10$ b) $z^2=-16$
c) $z^2+10=0$ d) $(z^2+4)(z^2-4)=0$ e) $z^4-16=0$ f) $z^4=4$

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2+z+1=0$ b) $z^2-3z+18=0$ c) $z^2+9z-4=0$ d) $-z^2+(1+\sqrt{3})z-\sqrt{3}=0$

e) $z^4+4z^2-21=0$ f) $z^2-\overline{z}+\frac{1}{4}=0$ g) $z^2-3\overline{z}+2=0$ h) $\dfrac{2z^2+2}{3}=z$ k) $z+\dfrac{1}{z}=1$

Exercice 14 Factoriser les polynômes : a) $P(z)=z^2-4$ b) $P(z)=z^2+1$ c) $P(z)=z^2+16$
d) $P(z)=z^2-4z+5$ e) $P(z)=z^2+3z+2$ f) $P(z)=z^4-1$ g) $P(z)=2z^2+z+1$

IV - Exercices

Exercice 15 Déterminer deux nombres dont la somme et le produit valent 2.

Exercice 16 Résoudre l'équation $z^2=\overline{z}$.
On notera par la suite z_0 la solution de cette équation dont la partie imaginaire est strictement positive.

a) Montrer que $z_0\overline{z_0}=1$

b) Donner la forme algébrique de z_0, z_0^2 et z_0^3.

c) Démontrer que, pour tout entier n, $z_0^{3n}=1$.

d) En déduire les valeurs de z_0^{3n+1} et z_0^{3n+2} pour tout entier n.

e) En déduire les valeurs de z_0^{999} et z_0^{2000}.

Exercice 17 On considère la fonction f définie pour tout nombre complexe $z\neq-1$ par l'expression $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$.

1. Déterminer la forme algébrique des images par f de : a) i b) $i+2$
2. Déterminer la forme algébrique du ou des antécédents de $1+i$.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de f, c'est-à-dire les nombres z tels que $f(z)=z$.