Calcul matriciel

Mathématiques expertes
Terminale générale

Table des matières

I - Introduction

Si les matrices sous leur formalisme actuel datent du début du XXe siècle, avec notamment l'appui de Heisenberg, l'intérêt pour les "tableaux de chiffres" est bien plus ancien.

Par exemple, le problème des "carrés magiques" intriguait déjà les mathématiciens chinois en 650 av. J.-C. et les systèmes d'équations linéaires furent complètement résolus trois siècles plus tard. La méthode de Cramer (1750) en est l'équivalent moderne.

En 1925, Heisenberg utilise la théorie des matrices pour formuler la mécanique quantique (alors aussi appelée *"mécanique matricielle"*, et qui est la première définition complète et correcte de la mécanique quantique), ancrant définitivement dans l'esprit des mathématiciens l'intérêt indéniable de ces objets, et convaincant les physiciens de l'efficacité de son utilisation. Dans les années qui suivent, de nombreux résultats furent découverts, en cryptographie, en calcul, en théorie des graphes, en optique...

La décomposition de matrices est encore actuellement un thème de recherche. De telles opérations permettent par exemple

- de diminuer le temps de calcul informatique de simulations numériques de phénomènes physiques, économiques, ..., et donc de permettre d'en réaliser de plus précises, plus complexes et donc plus réalistes.
- de séparer le bruit d'une image (décomposition en valeurs singulières),
- de repérer les caractéristiques d'un code génétique ou d'étudier automatiquement des données statistiques (*analyse en composantes principales*)
- ...

Exercice 1 Carrés magiques.
Compléter le tableau suivant avec les nombres de 1 à 9 de telle manière que la somme des nombres sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale soit égale à 15.

2		
	5	
4		

On peut de même rechercher un carré magique d'ordre 4, les sommes étant cette fois de 34 :

16	3		
	10		
9			
4		14	1

Exercice 2 Un sudoku

	4		5					
		3	4		7			2
		2		6	8	1	7	
	2	9					6	5
		8				4		
1	6					7	2	
	9	4	7	8		6		
8			6		5	2		
					2		8	

5	6		7			9		
		4	8				5	
	1	2		6				8
4	5		9		8	3		
		1	3			5		
			6		1		9	4
8				7		2	3	
	7				5	6		
		5			3			1

Image numérique. On peut représenter numériquement une image en découpant celle-ci suivant une grille comportant un certain nombre de lignes et de colonnes.

En associant chaque couleur à un nombre, puis un nombre à chaque "case" de cette grille, usuellement appelée pixel (pour *picture element*), on reconstitue ainsi l'image.
La dimension du pixel et le nombre utilisé (donc le nombre de lignes et de colonnes) donne la qualité de définition de l'image. Par exemple, les appareils photo numériques actuels sont équipés de capteur de quelques mégapixels (c'est-à-dire millions de pixels, quelques milliers de lignes et quelques milliers de colonnes).

Exercice 3 Un système d'équations

Résoudre les systèmes $\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 2y & = & 7 \\ -x & + & y & = & 1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & -6 \\ & & 2y & - & 3z & = & 16 \\ -3x & + & 3y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right.$

II - Définitions

Définition *Une matrice de dimension $n \times p$ est un tableau de réels à n lignes et p colonnes.*

De façon générale, on note $a_{i,j}$ le terme de la ligne i et de la colonne j. On note ainsi, $A = (a_{i,j})$ ou en détaillant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3.

Soit $A(1,1,1)$ et $B(1,2,3)$ deux points de l'espace ; A et B peuvent être considérés comme des matrices de dimension 1×3, et le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme une matrice de dimension 2×1.

Matrices particulières : Soit M une matrice de dimension $n \times p$:

- Si $n = p$, alors M est une matrice carrée d'ordre n ;
- Si $n = 1$, M est un vecteur ligne de dimension p ; (par exemple, les points A et B précédents)
- Si $p = 1$, M est un vecteur colonne de dimension n. (par exemple le vecteur $\overrightarrow{AB}$ précédent).
- Une matrice diagonale d'ordre n est une matrice carrée dont tous les coefficients hors de la diagonale sont nuls.

Exercice 4 Écrire explicitement les matrices :

a) A la matrice de dimension 3×4 définie par $A_{i,j} = i + j$.

b) B la matrice de dimension 5×3 définie par $b_{i,j} = 0$ si $i \geqslant j$ et $b_{i,j} = ij$ si $i < j$

c) C la matrice de dimension 5×3 définie par $c_{i,i} = 0$ et $c_{i,j} = \max(i, j)$ si $i \neq j$

Définition ***Matrices égales***
Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles ont même dimension $n \times p$ et que, pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est équivalent à $a = 2$, $b = 3$, $c = -5$, ...

Définition ***Matrice transposée***
Soit A une matrice de dimension $n \times p$. On appelle transposée de la matrice A, notée ${}^tA$, la matrice de dimension $p \times n$ dont les lignes sont les colonnes de A.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, alors ${}^tM = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Écrire les matrices transposées de $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,
$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

III - Opérations sur les matrices

Définition *Soit A et B deux matrices de même dimension $n \times p$. La somme $A + B$ est la matrice obtenue en additionnant deux à deux les termes qui ont la même position dans A et B.*
Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, alors $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$.

Pour un nombre réel k, la matrice $C = kA$ est la matrice $C = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = ka_{i,j}$, obtenue en multipliant chaque terme de A par k.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ alors, $A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 3-4 & -5+7 \\ -1+0 & 0+3 & 6-2 \end{pmatrix}$

Exercice 6 a) Calculer $A + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

b) Calculer $C = 2A - B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice C telle que $A + 2C = 3B$.

Exercice 8 Soit les vecteurs de l'espace $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$.

IV - Produit de matrices

Définition *Soit A une matrice de dimension $n\times p$ et B une matrice de dimension $m\times q$. Le produit des matrices A et B est défini lorsque $p=m$ et alors $C=AB$ est la matrice de dimension $n\times q$, définie par*

$$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$$

Exemples :

- Le produit de la matrice A de dimension 3×7 et de la matrice B de dimension 7×5 existe et $C=AB$ est de dimension 3×5.

- Le produit des matrices A de dimension 3×5 et B de dimension 7×5 n'existe pas.

- Soit $A=\begin{pmatrix}2&3\\-5&-1\\0&6\end{pmatrix}$, de dimension 3×2, et $B=\begin{pmatrix}2&5\\-4&1\end{pmatrix}$, de dimension 2×2, alors la matrice produit $C=AB$ est de dimension 3×2 avec

$$C=\begin{pmatrix}2&3\\-5&-1\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\-4&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}2\\-4\end{matrix}} & \begin{matrix}5\\1\end{matrix}\end{pmatrix}\\ =\begin{pmatrix}2&3\\ \boxed{-5\quad -1}\\0&6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\times 2+3\times(-4) & 2\times 5+3\times 1\\ \boxed{-5\times 2+(-1)\times(-4)} & -5\times 5-1\times 1\\ 0\times 2+6\times(-4) & 0\times 5+6\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&13\\-6&-26\\-24&6\end{pmatrix}\end{array}$$

Exercice 9 Soit $A=\begin{pmatrix}5&3&-1\\4&2&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2&0&4\\1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$.

Quelle est la dimension de la matrice produit AB ? Calculer la matrice produit $C=AB$.

Exercice 10 Soit $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

Quelles sont les dimensions des matrices produits AB et BA ? Calculer ces deux matrices produits.

Exercice 11 Soit $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1\\-3&2\end{pmatrix}$.
Déterminer les dimensions des matrices produits AB et BA, puis les calculer.

Exercice 12 Soit $A=\begin{pmatrix}2&-6\\3&-9\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}9&-3\\3&-1\end{pmatrix}$. Calculer les produits AB et BA.

Remarque : On peut donc avoir pour deux matrices A et B, un produit nul : $AB=0$,
MAIS ni $A=0$, ni $B=0$.
Pas d'équation produit nul avec les matrices !

Définition *Pour une matrice carrée A d'ordre n, on note, pour un entier non nul k,*

$$A^k=\underbrace{AA\dots A}_{k matrices}$$

Exercice 13 Soit $A=\begin{pmatrix}2&-3\\4&-5\end{pmatrix}$. Déterminer les dimensions des matrices A^2 et A^3, puis les calculer.

Propriété *Soit A, B et C trois matrices et $k \in \mathbb{R}$, alors, lorsque les produits existent, on a les propriétés*

- *associativité :* $(AB)C = A(BC) = ABC$
- *distributivité :* $A(B+C) = AB + AC$
- $(kA)B = A(kB) = k(AB) = kAB$

MAIS, comme on l'a déjà vu, le produit n'est pas commutatif : en général $AB \neq BA$.
En particulier, $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
Les identités remarquables (et d'autres formules) ne restent vraies pour les matrices que lorsque celles-ci commutent.

Exercice 14 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et AC. En déduire une matrice M telle que $AM = 0_3$, où la matrice 0_3 est la matrice nulle, ne contenant que des 0.

Exercice 15 Soit a un réel, $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer NA.

b) En déduire que $N^2 = 2N$, puis exprimer N^3, N^4 et N^5 en fonction de N.

c) Quelle conjecture peut-on alors faire au sujet de N^p, pour tout entier p ? Démontrer cette conjecture.

Exercice 16 Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$.
Montrer que $M^2 = 4M$. En déduire M^3 puis M^4, puis M^n pour tout entier $n \geqslant 1$.

V - Inverse d'une matrice

Définition ***Matrice unité***
On note I_n la matrice carrée d'ordre n qui comporte des 1 sur sa diagonale, et des zéros ailleurs.

Exemples : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les produits $A\,I_2$ et $I_2\,A$.

Propriété *Pour toute matrice A tel que le produit existe, on a $AI_n = I_nA = A$.*

On pose aussi par convention $A^0 = I_n$.

Exercice 18 On considère les matrices $U = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = I_3 - U$.

Calculer les matrices suivantes : a) U^2 b) V^2 c) UV d) VU

Définition ***Inverse d'une matrice***

Une matrice carrée d'ordre n est dite ***inversible*** *lorsqu'il existe une matrice B telle que :*

$$AB = BA = I_n$$

Dans ce cas, cette matrice B est unique et s'appelle matrice inverse de A, notée $B = A^{-1}$.

<u>Exemple :</u> Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors A est inversible, avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$.

En effet, $AA^{-1} = \cdots = I_2$, de même que $A^{-1}A = \cdots = I_2$

Exercice 19 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice A.

Exercice 20 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que B est l'inverse de A.

b) En déduire les solutions de l'équation $XA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 21 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $6A - A^2$. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice 22 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $A^2 = 2I_3 - A$, et en déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice 23 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A$.

En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 24

a) Résoudre le système d'équations : $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 7 \\ -x & + & y & = & 1 \end{array} \right.$

b) Écrire ce système sous la forme matricielle $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et A et B deux matrices à préciser.

c) Pour a et b deux nombres quelconques, résoudre le système d'équations : $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & a \\ -x & + & y & = & b \end{array} \right.$.

Exprimer les solutions x et y en fonction de a et b.

On écrira finalement la solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sous la forme matricielle $X = A'B$ avec $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, en précisant le matrice A'.

Quel lien y-a-t-il entre les matrices A et A' ?

Définition ***Déterminant d'une matrice d'ordre 2***

Pour une matrice carrée A d'ordre 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on appelle déterminant de A le nombre $\det(A) = ad - bc$.

Propriété ***Inverse d'une matrice d'ordre 2***
La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$*, et alros dans ce cas*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration: Pour $\det(A) \neq 0$, il suffit de calculer AA^{-1} et $A^{-1}A$ avec la formule précédente. On obtient $A^{-1}A = A^{-1}A = I_2$, ce qui montre que A est bien inversible et que son inverse est bien donnée par cette formule.

Il reste à démontrer que si $\det(A) = 0$, la matrice n'est pas inversible. On peut le démontrer en passant par la résolution d'un système de 2 équations à 2 inconnues, système qui n'a alors pas de solution, comme on va le voir après. □

Exercice 25 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0,5 & 4 \\ 0,25 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer si ces matrices sont inversibles, et calculer le cas échéant leur inverse.

Exercice 26 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
Déterminer alors une matrice M telle que $AM = B$.

Exercice 27 Soit le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 7 \\ x & - & 3y & = & -13 \end{array}\right.$

a) Résoudre ce système.
b) Écrire ce système sous forme matricielle, puis le résoudre en calculant une matrice inverse.

VI - Systèmes d'équations et matrices

Exercice 28 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Détailler le produit AX et l'équation matricielle $AX = B$. Resoudre ce système.

Propriété *Soit A une matrice carrée inversible, alors le système $AX = B$ admet une solution unique donnée par : $X = A^{-1}B$.*

Exercice 29 Ecrire sous forme matricielle les systèmes, et les résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 9 \\ -x & + & 3y & = & 8 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & 6 \\ -2x & + & 9y & = & 12 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 2y & = & -4 \\ -2x & + & 3y & = & 13 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 9 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & -6 \\ & & x & - & 2z & = & 6 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 10 \\ -x & + & 5y & + & 3z & = & 18 \\ x & - & y & - & z & = & -4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ -x & + & y & - & z & = & -5 \end{array}\right.$$

VII - Exercices

Exercice 30 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer des réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.
En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 31 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et donner son inverse.
2. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on notera D.
3. Calculer la matrice D^n pour tout entier naturel non nul n.
4. Déduire des questions précédentes une expression de A^n en fonction de n.
5. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & 4u_n & - & 6v_n \\ v_{n+1} & = & u_n & + & v_n \end{array} \right.$
   a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer sous forme matricelle X_{n+1} en fonction de X_n.
   b) Quelle est la nature de la suite (X_n) ? en déduire une expression de X_n en fonction de n.

Exercice 32 **Des complexes sous forme matricielle**

1. On considère la matrice $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer i^2 et i^{-1}.
2. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels.
   Vérifier que i et I_2 appartiennent à $\mathbb{C}$, et que toute matrice de $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $aI_2 + bi$, avec a et b réels.
3. Montrer que toute matrice non nulle de $\mathbb{C}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 33 **Diagonalisation d'une matrice**
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout réel x, on pose $P(x) = \det(A - xI_2)$.
   Calculer $P(x)$ et déterminer ses racines x_1 et x_2.
   Que peut-on dire des matrices $A - x_1I_2$ et $A - x_2I_2$?
2. Déterminer un vecteur X_1 solution de $(A-x_1I_2)X = 0$ et un vceteur X_2 solution de $(A-x_2I_2)X = 0$.
3. On forme alors la matrice P dont la première colonne est X_1 et la deucième colonne est X_2.
   a) Montrer que la matrice P est inversible et donner son inverse.
   b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
4. Calculer la matrice D^n pour tout entier n, et en déduire une expression de A^n.