Calcul matriciel - Exercices

Exercice 1 Carrés magiques.

Compléter le tableau suivant avec les nombres de 1 à 9 de telle manière que la somme des nombres sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale soit égale à 15.

2		
	5	
4		

On peut de même rechercher un carré magique d'ordre 4, les sommes étant cette fois de 34 :

16	3		
	10		
4		14	1

(la somme des quatre chiffres figurant dans les quatre cases centrales ou encore dans les quatre cases d'angle vaut aussi 34)

Exercice 2 Un sudoku

	4		5					
		3	4		7			2
		2		6	8	1	7	
	2	9					6	5
		8				4		
1	6					7	2	
	9	4	7	8		6		
8			6		5	2		
					2		8	

5	6		7			9		
		4	8				5	
	1	2		6				8
4	5		9		8	3		
		1	3			5		
			6		1		9	4
8				7		2	3	
	7				5	6		
		5			3			1

Exercice 3 Systèmes d'équations

Résoudre les systèmes $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 7 \\ -x & + & y & = & 1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & -6 \\ & & 2y & - & 3z & = & 16 \\ -3x & + & 3y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right.$

Exercice 4 Écrire explicitement les matrices :

a) A la matrice de dimension 3×4 définie par $A_{i,j} = i + j$.

b) B la matrice de dimension 5×3 définie par $b_{i,j} = 0$ si $i \geqslant j$ et $b_{i,j} = ij$ si $i < j$

c) C la matrice de dimension 5×3 définie par $c_{i,i} = 0$ et $c_{i,j} = \max(i,j)$ si $i \neq j$

Exercice 5 Écrire les matrices transposées de $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 6 a) Calculer $A + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

b) Calculer $C = 2A - B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 7 Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$, et $B=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice C telle que $A+2C = 3B$.

Exercice 8 Soit les vecteurs de l'espace $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$.

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Quelle est la dimension de la matrice produit AB ? Calculer la matrice produit $C = AB$.

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Quelles sont les dimensions des matrices produits AB et BA ? Calculer ces deux matrices produits.

Exercice 11 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les dimensions des matrices produits $A\,B$ et $B\,A$, puis les calculer.

Exercice 12 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer les produits AB et BA.

Exercice 13 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminer les dimensions des matrices A^2 et A^3, puis les calculer.

Exercice 14 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et AC. En déduire une matrice M telle que $AM = 0_3$, où la matrice 0_3 est la matrice nulle, ne contenant que des 0.

Exercice 15 Soit a un réel, $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer NA.

b) En déduire que $N^2 = 2N$, puis exprimer N^3, N^4 et N^5 en fonction de N.

c) Quelle conjecture peut-on alors faire au sujet de N^p, pour tout entier p ? Démontrer cette conjecture.

Exercice 16 Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que $M^2 = 4M$. En déduire M^3 puis M^4, puis M^n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 17 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les produits $A\,I_2$ et $I_2\,A$.

Exercice 18 On considère les matrices $U = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = I_3 - U$.

Calculer les matrices suivantes : a) U^2 b) V^2 c) UV d) VU

Exercice 19 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice A.

Exercice 20 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que B est l'inverse de A.

b) En déduire les solutions de l'équation $XA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 21 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $6A - A^2$. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice 22 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $A^2 = 2I_3 - A$, et en déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice 23 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A$.

En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 24

a) Résoudre le système d'équations : $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 7 \\ -x & + & y & = & 1 \end{array} \right.$

b) Écrire ce système sous la forme matricielle $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et A et B deux matrices à préciser.

c) Pour a et b deux nombres quelconques, résoudre le système d'équations : $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & a \\ -x & + & y & = & b \end{array} \right.$.

Exprimer les solutions x et y en fonction de a et b.

On écrira finalement la solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sous la forme matricielle $X = A'B$ avec $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, en précisant le matrice A'.

Quel lien y-a-t-il entre les matrices A et A' ?

Exercice 25 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0,5 & 4 \\ 0,25 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer si ces matrices sont inversibles, et calculer le cas échéant leur inverse.

Exercice 26 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Déterminer alors une matrice M telle que $AM = B$.

Exercice 27 Soit le système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 7 \\ x & - & 3y & = & -13 \end{array} \right.$

a) Résoudre ce système.

b) Écrire ce système sous forme matricielle, puis le résoudre en calculant une matrice inverse.

Exercice 28 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Détailler le produit AX et l'équation matricielle $AX = B$. Resoudre ce système.

Exercice 29 Ecrire sous forme matricielle les systèmes, et les résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 9 \\ -x & + & 3y & = & 8 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & 6 \\ -2x & + & 9y & = & 12 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 2y & = & -4 \\ -2x & + & 3y & = & 13 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 9 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & -6 \\ & & x & - & 2z & = & 6 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 10 \\ -x & + & 5y & + & 3z & = & 18 \\ x & - & y & - & z & = & -4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ -x & + & y & - & z & = & -5 \end{array}\right.$$

Exercice 30 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer des réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.
En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 31 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et donner son inverse.
2. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on notera D.
3. Calculer la matrice D^n pour tout entier naturel non nul n.
4. Déduire des questions précédentes une expression de A^n en fonction de n.
5. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & 4u_n & - & 6v_n \\ v_{n+1} & = & u_n & + & v_n \end{array}\right.$
   a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer sous forme matricelle X_{n+1} en fonction de X_n.
   b) Quelle est la nature de la suite (X_n) ? en déduire une expression de X_n en fonction de n.

Exercice 32 **Des complexes sous forme matricielle**

1. On considère la matrice $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer i^2 et i^{-1}.
2. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels.

   Vérifier que i et I_2 appartiennent à $\mathbb{C}$, et que toute matrice de $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $aI_2 + bi$, avec a et b réels.
3. Montrer que toute matrice non nulle de $\mathbb{C}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 33 **Diagonalisation d'une matrice**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout réel x, on pose $P(x) = \det(A - xI_2)$.
   Calculer $P(x)$ et déterminer ses racines x_1 et x_2.
   Que peut-on dire des matrices $A - x_1I_2$ et $A - x_2I_2$?
2. Déterminer un vecteur X_1 solution de $(A-x_1I_2)X = 0$ et un vceteur X_2 solution de $(A-x_2I_2)X = 0$.
3. On forme alors la matrice P dont la première colonne est X_1 et la deucième colonne est X_2.
   a) Montrer que la matrice P est inversible et donner son inverse.
   b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
4. Calculer la matrice D^n pour tout entier n, et en déduire une expression de A^n.