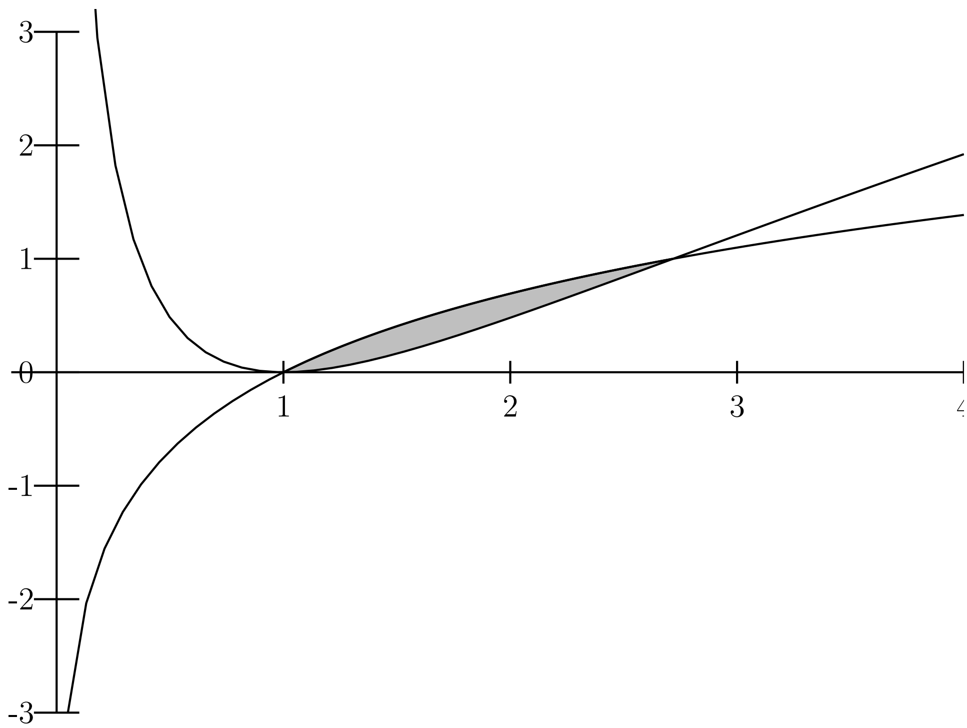
Devoir de mathématiques

Exercice 1 Calculer les intégrales : $I_1 = \displaystyle\int_0^3 3x^5\,dx$; $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^1 xe^{3x^2}\,dx$; $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}\,dx$;

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_4 = \displaystyle\int_0^1 xe^{-3x}\,dx$

Exercice 2 Les courbes C et C' données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.



1. On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie grisée.
   On note $I = \displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$ et $J = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,dx$.
   a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
   b) Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que $J = e - 2I$.
   c) Donner la valeur de A.
2. Pour x appartenant à l'intervalle $[1;e]$, on note M le point de la courbe C d'abscisse x et N le point de la courbe C' de même abscisse.
   Pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maxiale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Exercice 3 *Bac S, 19 juin 2014, 5 points*
Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

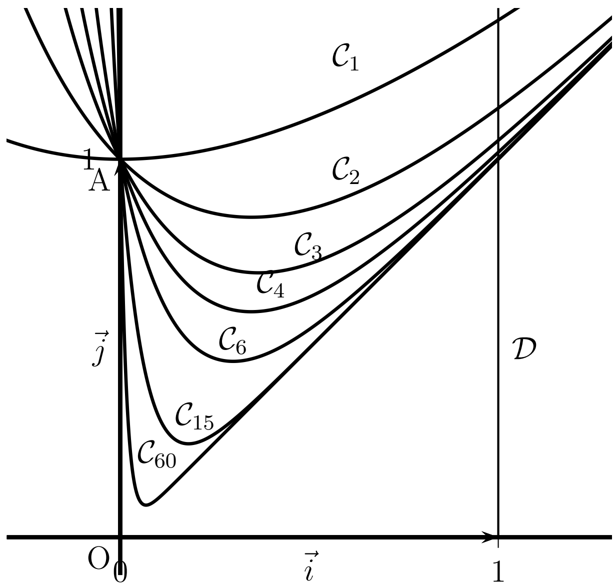
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\, \mathrm{d}x.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.



a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right)\, dx.$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice 4 On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par l'expression

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1 + e^x} dx$$

1. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 e^{nx} dx$.
2. Calculer I_1.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).
4. Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{1 + e^x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
5. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de la suite (I_n).