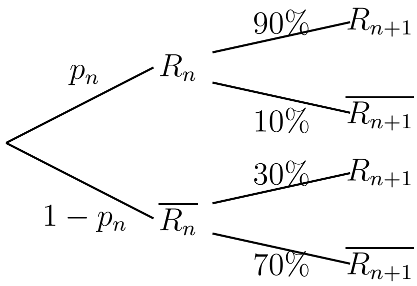
Corrigé du Baccalauréat général - Polynésie 14 mars 2023
Épreuve d'enseignement de spécialité
– Mathématiques –

Exercice 1   5 points   **Thème : probabilités, suites**

Partie A

1.



2. En utilisant l'arbre précédent, ou la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(R_{n+1}) = p_n \times 90\% + (1-p_n) \times 30\% \\ &= 60\% p_n + 30\% \\ &= 0,6 p_n + 0,3 \end{aligned}$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0,75$.

   a) Pour tout entier n, on a

   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,75 \\ &= 0,6p_n + 0,3 - 0,75 \\ &= 0,6p_n - 0,45 \end{aligned}$$

   puis, comme $u_n = p_n - 0,75 \iff p_n = u_n + 0,75$, on obtient donc

   $$u_{n+1} = 0,6(u_n + 0,75) - 0,45 = 0,6u_n$$

   ce qui la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $u_0 = p_0 - 0,75 = -0,15$.

   b) On déduit de la question précédente que, pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n = -0,15 \times 0,6^n$ et donc que

   $$p_n = u_n + 0,75 = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

   c) Comme $-1 < 0,6 < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = l = 0,75$

   d) Dans le cadre de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un nombre important de séances d'entraînement, le nombre de haies que l'athlète réussira à franchir sera d'environ 0,75=75%.

Partie B

1. Lors d'un 400 mètres, on répète $n = 10$ fois l'expérience aléatoire "l'athlète tente de franchir une haie" dont le succès est "l'athlète franchit la haie" de probabilité $p = 0,75$. Ces répétitions sont supposées identiques et indépendantes.
   De plus la variable aléatoire X est égale au nombre de succès, c'est-à-dire au nombre de haies franchies.
   On en déduit donc que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,75$.
2. La probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies est $P(X = 10) = p^{10} \simeq 0,056$.
3. Avec la calculatrice, on trouve $p(X \geqslant 9) = P(X = 9) + P(X = 10) \simeq 0,244$.

Exercice 2 5 points **Thème : géométrie dans l'espace**

1. $\vec{n}_1(5;2;4)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et $\vec{n}_2(10;14;3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$.
   Comme ces vecteurs ne sont pas colinéaires, on en déduit que les plans ne sont pas parallèles.
2. D'après la question précédente, on sait donc que ces deux plans sont sécants suivant une droite.
   Il reste à montrer que cette droite est $\mathcal{D}$.
   On peut pour cela, par exemple, déterminer deux points de $\mathcal{D}$ et vérifier qu'ils appartiennent aussi à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
   Par exemple, avec $t=0$, on a la point $M_1(1;0;3)\in\mathcal{D}$ et $5\times1+2\times0+4\times3=17$ donc $M_1\in\mathcal{P}_1$, et aussi $10\times1+14\times0+3\times3=19$ donc $M_1\in\mathcal{P}_2$.
   De même, avec $t=1$, on a le point $M_2(3;-1;1)\in\mathcal{D}$ et et $5\times3+2\times(-1)+4\times1=17$ donc $M_2\in\mathcal{P}_1$, et aussi $10\times3+14\times(-1)+3\times1=19$ donc $M_2\in\mathcal{P}_2$.
   On a donc trouver que $\mathcal{D}=(M_1M_2)$ est la droite intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
3. a) Pour $A(1;-1;-1)$ on a $5\times1+2\times(-1)+4\times(-1)=-1\neq17$ donc $A\notin\mathcal{P}_1$.
   b) Avec les coordonnées du point A et la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, on a
   $$\left\{\begin{array}{lcl} 1 &=& 1+2t\\ -1 &=& -t\\ -1 &=& 3-2t\end{array}\right.$$
   La première équation donne $t=0$ qui est incompatible avec les deux autres. Il n'existe donc pas une valeur du paramètre t, et A n'appartient donc pas à $\mathcal{D}$.
4. $M(1+2t\ ;\ -t\ ;\ 3-2t)\in\mathcal{D}$ et $f(t)=AM^2$.
   a) EN calculant la longueur AM, on a
   $$\begin{aligned} f(t) &= AM^2\\ &= \Big(1+2t-1\Big)^2+\Big(-t-(-1)\Big)^2+\Big(3-2t-(-1)\Big)^2\\ &= \Big(2t\Big)^2+\Big(-t+1\Big)^2+\Big(-2t+4\Big)^2\\ &= 4t^2+t^2-2t+1+4t^2-16t+16\\ &= 9t^2-18t+17\end{aligned}$$
   b) f est un trinôme du second degré qui atteint son minimum en $t=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-18}{2\times9}=1$ (on peut aussi étudier les variations de f, dérivée...) donc pour le point $M(1+2\times1;-1;3-2\times1)$ donc $M(3;-1;1)$.
5. Le point $H=M$, trouvé précédemment, est tel que la distance AM de A à un point quelconque $M\in\mathcal{D}$ est minimale. Il s'agit donc de la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}$ et donc (AH) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Exercice 3 5 points **Thème : étude de fonctions**

Partie A

1. La fonction de la courbe $\mathcal{C}_1$ change de signe en $x=4$ où la $\mathcal{C}_3$ change de sens de variation.
   $\mathcal{C}_1$ est donc la courbe de la dérivée de la fonction de $\mathcal{C}_3$.
   La fonction de la courbe $\mathcal{C}_3$ est toujours positive, et $\mathcal{C}_2$ toujours croissante, donc la fonction de la courbe $\mathcal{C}_3$ est la dérivée de celle de la courbe $\mathcal{C}_2$.
   En résumé, $\mathcal{C}_1$ est la courbe de f'', $\mathcal{C}_3$ la courbe f' et $\mathcal{C}_2$ celle de f.
2. On peut penser à tracer cette tangente et à lire approximativement son coefficient directeur.

   Ici, $\mathcal{C}_3$ est la courbe de la fonction dérivée de la fonction de la courbe $\mathcal{C}_2$, cette dérivée, en $x=4$ est donnée par l'ordonnée du point de la courbe $\mathcal{C}_3$, soit le coefficient directeur $f'(4)\simeq3$.
3. Les abscisses des points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$ semblent être 2, 4 et 6.

Partie B $g(x)=\dfrac{4}{1+e^{-kx}}$

1. Comme $k>0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} -kx=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-kx}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.
   De même, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -kx=-\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-kx}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=4$.
2. On a $g=4\times\dfrac{1}{u}$ avec $u=1+e^v$, soit $u'=v'e^v$ donc $u'(x)=-ke^{-kx}$, et alors $g'=4\times\dfrac{-u'}{u^2}$, soit
   $$g'(x)=\frac{4ke^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^2}$$
   et donc
   $$g'(0)=\frac{4ke^0}{\left(1+e^0\right)^2}=\frac{4k}{2^2}=k$$
3. Le courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse x lorsque $g''(x)=0$ et g'' change de signe autour de x.
   Ici, comme $e^{kx}\neq 0$ et $\dfrac{k^2}{\left(\mathrm{e}^{kx}+1\right)^3}\neq 0$, on a
   $$g''(x)=0 \iff e^{kx}-1=0 \iff x=0$$
   De plus, pour tout réel x, on a $-4e^{kx}<0$ et $\dfrac{k^2}{\left(\mathrm{e}^{kx}+1\right)^3}>0$, et ainsi, le signe de $g''(x)$ est l'opposé de celui de $e^{kx}-1$.
   Or $e^{kx}-1>0 \iff e^{kx}>1 \iff kx>0$ en appliquant la fonction ln strictement croissante.
   De même on a $e^{kx}-1<0 \iff x<0$, et $g''(x)$ s'annule bien en 0 en y changeant de signe : le point d'abscisse 0 est un point (en fait donc le seul point) d'inflexion de la courbe de g.
   En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

Exercice 4 5 points **Thème : suites, fonction logarithme, algorithmique**

1. **Vrai.** On a, selon la parité de n, soit $(-1)^n=1$ soit $(-1)^n=-1$ et ainsi
   $$\frac{-1}{n+1}\leqslant u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}$$
   or $\dfrac{1}{n+1}\leqslant 1$ et donc, en multipliant par $(-1)<0$, on obtient aussi $\dfrac{-1}{1}n+1\geqslant -1$, et ainsi, en résumé,
   $$-1\leqslant\frac{-1}{n+1}\leqslant u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}\leqslant 1$$
   ce qui montre donc que la suite est bornée, minorée par -1 et majorée par 1.
2. **Faux.** Il faudrait par exemple aussi qu'elle soit monotone (théorème de convergence monotone).
   Il suffit donc de chercher un contre exemple avec une suite qui n'est pas monotone, par exemple $u_n=(-1)^n$ qui vaut alternativement 1 et -1, donc bornée, mais ne converge pas.
   On peut aussi prendre comme contre exemple $u_n=cos(n)$ ou d'autres fonctions oscillantes.
3. **Faux.** Comme précédemment, on pense au théorème de convergence montone, avec une suite croissante. Il suffit d'en choisir une bornée (majorée ici) pour qu'elle ne tende pas vers l'infini mais vers une limite finie.
   Par exemple, $u_n=-\dfrac{1}{n}$ est croissante (strictement) et tend vers 0, donc ne tend pas vers $+\infty$.

4. **Faux.** Il s'agit de déterminer la dérivée seconde de cette fonction.
   On a $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 2$ donc $u'(x) = 2x + 2$ et donc $f' = \dfrac{u'}{u}$ soit
   $$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$
   On dérie à nouveau : $f' = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x + 2$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = x^2 + 2x + 2$ donc $v'(x) = 2x + 2$, d'où $f'' = (f')' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ soit
   $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(x^2+2x+2) - (2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 4x}{(x^2+2x+2)^2} \\ &= \frac{-2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2} \end{aligned}$$
   Le dénominateur est toujours positif, et le numérateur est du second degré de racines évidentes $x = 0$ et $x = -2$ et change donc de signe en ces deux valeurs.
   Ainsi, f change de convexité en ces deux valeurs et n'est donc pas toujours convexe sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.
5. **Vrai.** La fonction **mystere** renvoie le maximum de la liste L.
   Ici, ce maximum est bien 7.